Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik

Technische Universität München — Prof. Dr.-Ing. R. Kennel

Arcisstraße 21
D–80333 München

email: eal@ei.tum.de
http: www.eal.ei.tum.de

Tel.: +49 (0)89 289–28358
Fax: +49 (0)89 289–28336

Kurzskriptum mit Projektbeschreibungen

Projektstudium Antriebstechnik

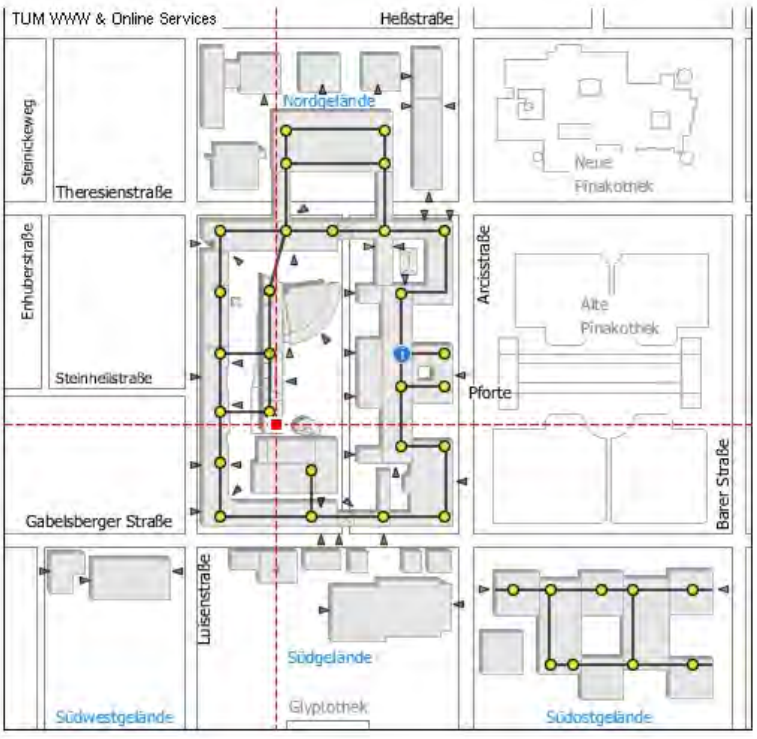
Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team

Christoph Hackl

29. 01. 2015

Betreuer:
Christoph Hackl, Gebäude 5507 (Maschinenwesen/Garching), Raum 2733
Tel. 289 – 16688, email: christoph.hackl@tum.de

Ort:
Lehrlabor des Lehrstuhls, Neubau Innenhof, Gebäude 9, Raum 0901
(Erdgeschoss, ganz links, siehe Lageplan)



Inhaltsverzeichnis

I Einführung und Motivation v

1 Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team vii
1.1 Motivation und Erkenntnisse aus der Hochschuldidaktik und Lernpsychologie vii
1.2 Idee des Lehrkonzeptes "Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team" viii
1.3 Konkrete Umsetzung: Pilotphase im WS 2014/2015 ix
1.3.1 Ablauf x
1.3.2 Inhalt und Lernziele xi
1.4 Vision und Potenzial xi
1.5 Danksagung xii

II Projekte 1

2 Gleichstrommaschine 3
2.1 Problemstellung 3
2.2 Laboraufbau 4
2.3 Simulation 4
2.3.1 Modellbildung und Verhalten 8
2.3.2 Regelung im Ankerstellbereich (d.h. $\psi_E = \psi_{EN}$) 12
2.3.3 Regelung im Feldschwächbereich (d.h. $\psi_E \leq \psi_{EN}$) 14
2.4 Implementierung 20
2.4.1 Laboraufbau: Komponenten, Schnittstelle und Signale 20
2.4.2 Laboraufbau: Bedienung und Implementierung 20
2.4.3 Vorgehensweise und Arbeitsschritte 24

3 Permanentmagnet-Synchronmaschine 31
3.1 Problemstellung 31
3.2 Laboroaufbau 32
3.3 Simulation 35
3.3.1 Modellbildung und Verhalten 35
3.3.2 Regelung 43
3.4 Implementierung 44

4 Asynchronmaschine 45
4.1 Problemstellung 45
4.2 Laboraufbau 45
4.3 Simulation 47
4.3.1 Modellbildung und Verhalten 47
4.3.2 Regelung 49

4.4 Implementierung 51

5 Zwei-Massen-System **53**
5.1 Problemstellung 53
5.2 Simulation 53
5.2.1 Modellbildung und Verhalten 53
5.2.2 Regelung 55

Literaturverzeichnis **59**

III Anhänge **61**

A Allgemeine Grundlagen **63**
A.1 Trigonometrische Formeln (siehe [16]) 63
A.2 Energieeinheiten und Umrechnungsfaktoren 64
A.3 Stromsysteme (siehe [8]) 65
A.3.1 Wechselstrom 65
A.3.2 Drehstrom (symmetrisch) 66

B Grundlagen der Gleichstrommaschine **69**
B.1 Danksagung 69
B.2 Modellbildung 69
B.2.1 Vierquadrantensteller 69
B.2.2 Fremderregte Gleichstrommaschine 72
B.2.3 Sensorik 76
B.3 Regelung 79
B.3.1 Übersicht 79
B.3.2 Modelle und Signalflusspläne 80
B.3.3 Regelung 81

C Grundlagen der Drehfeldmaschinen (siehe [17] und [18]) **83**
C.1 Übersicht 83
C.2 Allgemeines Grundwellenmodell von Drehfeldmaschinen 83
C.2.1 Danksagung 83
C.2.2 Annahmen zur Modellbildung 83
C.2.3 Elektrische Differentialgleichungen 85
C.2.4 Magnetische Zusammenhänge 86
C.2.5 Flussverkettungen der einzelnen Stränge 86
C.2.6 Raumzeigerdarstellung 91
C.2.7 Umrechnung rotorbezogener Größen auf die Statorseite 99
C.2.8 Momentenerzeugung und Mechanik 100
C.3 Wichtige Zusammenhänge 101

D Grundlagen der Regelungstechnik (siehe [7, 16–18]) **105**
D.1 Wichtige Zusammenhänge 105
D.2 Wiederholungsaufgaben 109
D.2.1 Standardstrecken anhand der Gleichstrommaschine (GM) 109
D.2.2 Regelkreise und Reglerauslegung 111
D.3 Optimierungstabelle 114

Teil I

Einführung und Motivation

Kapitel 1

Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team

Das Lehrkonzept "Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team" wurde in 2013 mit dem Ernst-Otto Fischer Lehrpreises der Fakultät EI ausgezeichnet. Das folgende Skriptum soll in die Thematik einführen und die wichtigsten Anhaltspunkte vermitteln.

1.1 Motivation und Erkenntnisse aus der Hochschuldidaktik und Lernpsychologie

Im Zuge des Bologna-Prozesses stehen verstärkt die Ziele "Vermittlung von Kompetenzen" und "Lösungsorientiertes Lernen" im Vordergrund der Hochschullehre. Die Lehrevaluationen innerhalb der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik (EI) zeigen, dass diese Ziele immer besser erreicht werden. Die Studierenden beurteilen den Besuch der angebotenen Lehrveranstaltungen als "insgesamt lohnend" (siehe z.B. S.4 in [4] mit 87,8% und [5] mit 92,7%). Doch im Bereich "Kompetenzerwerb" sind sich die Studierenden oft noch im Unklaren, ob sie die Inhalte der Veranstaltung(en) wiedergeben oder selbstständig bearbeiten könnten (vgl. S.5 in [4] und [5]) und sie sehen Defizite bei der Erprobung ihrer Kooperationsfähigkeit (vgl. S.7 in [9]). Des Weiteren äußern die Studierenden vermehrt den Wunsch nach klarem Praxisbezug. So ist laut der Studiengangsbefragung der Fakultät EI aus 2012 (vgl. S.11 in [9]) "unzureichender Praxisbezug" einer der am häufigsten genannten[1] Gründe für "Studiengangwechsel" (47,2%), "Hochschulwechsel" (52,9%) oder sogar "Studienabbruch" (46,3%). Es bleiben wohl – trotz anschaulichem Hochschulunterricht und praxisbezogener Motivation – noch zu oft folgende Fragen unbeantwortet: "Wofür lerne ich den aktuellen Stoff?" und "Kann ich das Erlernte wirklich eigenständig umsetzen?".
Viele Studierende (Lernende) empfinden sich als "passive Informationsempfänger" (S.173 in [21]) von Lehrinhalten, die sie ihrem späteren Berufsbild nicht direkt zuordnen können. Im universitären Umfeld liegt dieses Empfinden vermutlich daran, dass in der Regel zuerst Theorie (in Vorlesung und Übung) und dann Praxis (in z.B. Praktika oder Abschlussarbeiten) vermittelt werden. Das Erlernte kann zu selten direkt (im Sinne von zeitnah) praktisch wiederholt und umgesetzt werden. Insbesondere durch "learning by doing" gelingt aktives und somit tiefgehendes Lernen (Tiefenverständnis), was dauerhafte Kompetenzen – wie z.B. Anwendbarkeit und Übertragbarkeit des Gelernten im Beruf – zur Folge hat (vgl. [20]). Aktuelle Erkenntnisse aus der Hochschuldidaktik und Lernpsychologie untermauern diese Unsicherheit der Studierenden [1].

[1] Mehrfachnennung möglich.

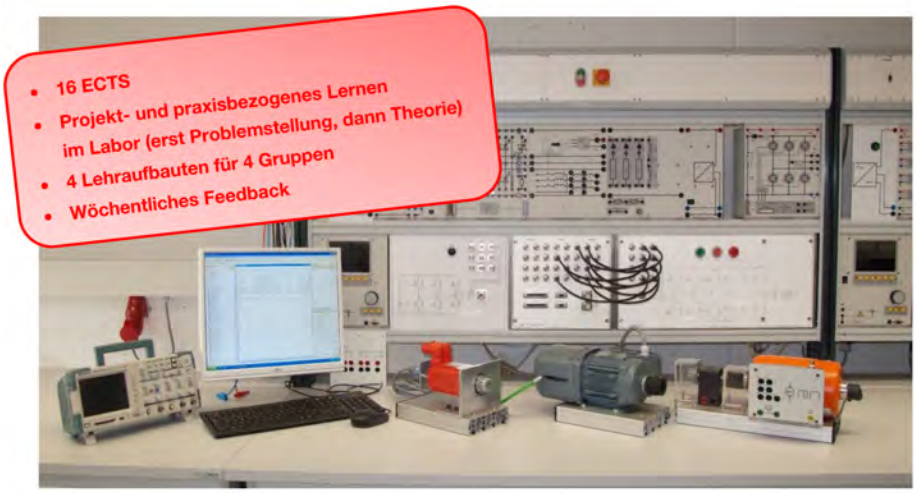


Abbildung 1.1: *Werbeposter.*

Die wichtigste Grundlage für aktives, intrinsisch motiviertes Lernen ist eine komplexe Problemstellung mit konkretem Anwendungsbezug bzw. mit nachvollziehbarer Relevanz für die studentische Ausbildung und den späteren Beruf (vgl. S.102 in [21] oder [14]). Die Problemstellung selbst nährt die intrinsische Motivation der Lernenden und verstärkt somit Eigeninteresse und Tiefenverständnis beim Lernen.
Um die intrinsische Motivation dauerhaft aufrechtzuerhalten, sollte den Lernenden eine möglichst große Autonomie in der Gestaltung ihres Lernverhaltens (im Sinne freier Zeiteinteilung und Portionierung des Stoffes) zugestanden werden [11]. Starre Lehrsysteme (wie in vielen der heutigen Bachelor- und Masterstudiengänge) führen zu einer (gefühlten) Fremdbestimmung [13]. Lerninhalte, aufbereitet in fachdidaktischer und nicht in kompetenz-erwerbender Logik, werden meist als Zwang oder Druck von außen wahrgenommen. Diese extrinsische Motivation fördert häufig nur das Aneignen von Faktenwissen, reduziert intrinsische Motivation und erschwert Tiefenverständnis.
Zusätzlich ist universitäres Lernen in der Regel "rückmeldungsarm", d.h. es erfolgt kein zeitnahes, informierendes bzw. lernförderndes Feedback (ohne direkte Benotung) [11]. Am Ende des Semesters wird die "individuelle Leistung" lediglich durch Noten bewertet, aber eine individuelle Rückmeldung über den Lernfortschritt erfolgt kaum. Ausbleibendes Feedback erhöht die Unsicherheit des Lernenden, senkt die intrinsische Motivation und erschwert zielgerichtetes Lernen [11], [6].

1.2 Idee des Lehrkonzeptes "Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team"

Beim Lehrkonzept "Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team" soll die klassische Logik universitärer Lehr- und Lernprozesse "umgekehrt" werden: Ausgehend von einer praxisrelevanten Problemstellung soll im Team während eines "Projektstudiums" eine umfassende Lösung – vom Erlernen der nötigen Theorie bis hin zur praktischen Umsetzung am studentischen Laboraufbau – eigenständig (im Sinne von selbstverantwortlich) und möglichst selbstständig (also möglichst ohne fremde Hilfe) erarbeitet werden.
Während der Bearbeitung des Projektes werden die Kernkompetenzen des Ingenieursberufs (wie z.B. Modellbildung, Simulation, Aufbau, Implementierung/Programmierung, Test, Präsentation & Dokumentation) praxisnah erworben. Die Lerninhalte sollen aktiv und kooperativ

im Team erarbeitet werden. Eine Teilnahme an Vorlesungen und Übungen wird *nicht* verlangt. Die Studierenden werden bei ihrer Lösungsfindung durch den Lehrenden im Sinne eines Mentors begleitet, beraten und unterstützt.
Es soll folgende Lernsituation entstehen, um aktives und tiefgehendes Lernen zu ermöglichen:

- Konfrontation mit einer komplexen Problemstellung mit klarem Anwendungs-/Berufsbezug[2]
- Eigen– und selbstständiges Erarbeiten einer Lösung im Team
- Erkennen und Lösen von Teilproblemen durch Lernende selbst
- Lernen durch Artikulation und Reflexion in der Gruppe
- Aktive Begleitung durch den Lehrenden im Sinne eines "guide on side" (vgl. S.173 in [21]), d.h.:
  - problemlösungsorientierter Lehrinput (Vermittlung nur von essentiellen Lehrinhalten)
  - aktive Beratung und Unterstützung bei der Lösungsfindung und
  - regelmäßiges Feedback zum Lernfortschritt (der Gruppe & des Einzelnen).

Durch die komplexe Problemstellung treffen die Studierenden während ihrer Lösungsfindung auf unterschiedliche Teilprobleme, die wiederum zu lösen sind. Hierzu müssen auch theoretischen Grundlagen angeeignet und/oder erweitert werden.
Es ist zu erwarten, dass die intrinsische Motivation erhalten bleibt, da theoretisches Wissen in einen Problemkontext eingebunden ist: Zu jedem Zeitpunkt ist klar, warum das Erlernte angewendet bzw. erweitert werden muss. Um den Lernprozess zeit-effektiv zu begleiten und unnötige (oder zeitlich zu lange) Irrwege zu vermeiden, sollen bestimmte, essentielle Lehrinhalte (z.B. mathematische Theorien) durch Impulsvorträge des Lehrenden vorgestellt, diskutiert und geübt werden. Im Anschluss sollen im Team diese Lehrinhalte direkt ausprobiert und umgesetzt werden ("learning by doing").
Das Feedback zum Lernfortschritt der einzelnen Gruppe als auch der einzelnen Studierenden erfolgt wöchentlich im Rahmen eines Mentoring-Seminars. Hierbei wird der Lern-/Projektfortschritt durch Präsentationen vorgestellt und (Teil-)Probleme und mögliche Lösungsansätze diskutiert. Portionierung der Lerninhalte und Zeiteinteilung der Bearbeitung erfolgt eigenständig. Nur die Teilnahme an den Mentoring-Seminaren ist verpflichtend.

1.3 Konkrete Umsetzung: Pilotphase im WS 2014/2015

Die Idee des "Projetbezogenen Studierens – Aktives Lernen im Team" soll konkret als "**Projektstudium Antriebstechnik**" umgesetzt werden und ab WS[3] 14/15 in einer Pilotphase starten. Hierzu sollen 8–16 Studierende ausgewählt und in vier Gruppen (à 2–4 Studenten) aufgeteilt werden. Die vier Gruppen (Teams) bearbeiten über ein Semester (WS) hinweg den Themenkomplex "Regelung von elektrischen Maschinen". Es sollen die gängigsten Regelungsverfahren (z.B. Feldorientierte Regelung) für typische elektrische Maschinen (Gleichstrom-, Asynchron- und Synchronmaschine) erlernt und pro Gruppe an einem studentischen Laboraufbau (bestehend aus entsprechender Hardware) implementiert werden.

[2] Hierbei sollte idealerweise die Lernumgebung/-situation der Anwendungsumgebung/-situation entsprechen [20].
[3] Sommersemester (SS) oder Wintersemester (WS)

Das "Projektstudium Antriebstechnik" wird im WS14/15 in einer Pilotphase umgesetzt. Hierzu wird es in den Studiengang M.Sc. EI über die Anerkennung folgender drei Module des Lehrstuhls für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik eingebettet:

- Vorlesung/Übung/Praktikum "Bewegungsteuerung durch geregelte elektrische Antriebe" (WS, 4 SWS, 5 ECTS[4])
- Projektpraktikum "Antriebstechnik" (WS/SS, 4 SWS, 6 ECTS)
- Hauptseminar "Intelligente Verfahren in der Mechatronik" (SS/WS, 5 ECTS)

Nach erfolgreichem Abschluss des Projektstudiums Antriebstechnik werden den Teilnehmern – zusätzlich zur Anerkennung von 16 ECTS in Form der oben genannten Module – Zertifikate mit Beschreibung des Lehrformates und der Aufgabenstellung ausgehändigt, die die besondere Lernleistung, Eigenständigkeit und Praxisorientierung der Teilnehmer bestätigen.
Im Unterschied zum "klassischen" Studium dieser Module wird für die Studierenden des Projektstudiums die Teilnahme an den oben genannten Veranstaltungen nicht gefordert. Sie bearbeiten die Inhalte eigen- und (möglichst) selbstständig im Rahmen des Projektstudiums und bekommen nach erfolgreichem Abschluss genau diese Module anerkannt[5], d.h. analog zum herkömmlichen Studium sammeln die Teilnehmer des Projektstudiums innerhalb des Semesters insgesamt 16 ECTS (= 480 Stunden Arbeitsaufwand = 12 Wochen Vollzeit bei 40 Stunden/Woche). Individuelle Leistungsnachweise werden durch eine Abschlussprüfung, Präsentation(en) und einen Abschlussbericht erbracht. Im verpflichtenden, wöchentlichen Mentoring-Seminar (3 SWS) wird der aktuelle Projektstatus pro Gruppe regelmäßig präsentiert. Hier erhalten die Studierenden auch lernförderndes Feedback und aktive Beratung durch den Lehrenden (Mentor). Durch Impulsvorträge und -übungen werden essentielle Lehrinhalte (notwendig zur Lösung schwieriger Teilprobleme) erworben und im Anschluss im Team am Hardwareaufbau umgesetzt.

1.3.1 Ablauf

- Semesterbegleitend im Wintersemester 14/15
- Konkrete Problemstellung "Regelung von elektrischen Maschinen"
- Aktives, eigenständiges und praxisorientiertes Lernen im Team am eigenen Lehraufbau
- Freie Zeiteinteilung (Besuch von Vorlesungen, Übungen und Praktika ist nicht erforderlich)
- Wöchentliches Mentoring-Seminar (3 SWS): Präsentation des Projektstatus, direktes Feedback zum Lernfortschritt und problemlösungsorientierte Vermittlung von Lehrinhalten
- Semesterbegleitende Beurteilung + Abschlussklausur

[4] Die angegebenen Semesterwochenstunden (SWS) und European Credit Transfer System (ECTS) Punkte gelten ab WS1314.
[5] Diese Umsetzungsidee ist mit Ordinarius Prof. Dr.-Ing. Ralph Kennel abgesprochen.

1.3.2 Inhalt und Lernziele

- Modellierung und Simulation (in Matlab/Simulink) von Gleichstrom-, Asynchron- & Permanentmagnetsynchronmaschine, leistungselektronischer Stellglieder (z.B. 4-Quadrantensteller, Spannungszwischenkreisumrichter) und elastischen Antriebssystemen (Zwei-Massen-System)
- Simulation und Implementierung von Modulationsverfahren (z.B. Pulsweitenmodulation)
- Regler-Entwurf, -Simulation und -Implementierung (Strom-, Drehzahl-, Positionsregler) in Rapid-Prototyping Umgebungen (z.B. xPC-Target, dSPACE)

1.4 Vision und Potenzial

Eine Vision über zukünftige Hochschullehre schlägt ein verändertes Rollenverständnis für Lernende bzw. Lehrende vor: vom passiv zum aktiv lernenden Studierenden und vom "sage [=Weise/Dozent] on the stage" zum "guide [Mentor] on the side" (vgl. S.173 in [21]). Diese Vision teilt der Autor.
Langfristig könnte sich das Gesicht der Hochschullehre dahingehend wandeln, dass die Studierenden problemlösungsorientiert (also projektbezogen) studieren und sich somit Tiefenverständnis und dauerhafte Kompetenzen aktiv und eigenständig aneignen. Impulsvorträge und -übungen (für essentielle Lehrinhalte) kombiniert mit Mentoring-Seminaren könnten langfristig klassische Vorlesungen und Übungen ersetzen. Somit würde ohne zeitlichen Mehraufwand ein Lernumfeld für aktives und sinnstiftendes Lernen geschaffen. "Klassische Lehrzeit" würde eingespart und stünde für die neuen Mentoring-Aufgaben der Lehrenden zur Verfügung.
Durch die Bearbeitung im Team erproben die Studierenden die äußerst praxisrelevante Kooperationsfähigkeit und erleben Heterogenität (auch im Sinne der TUM Diversitygerechtigkeit). Im Team kommt es zu "Kooperativem Lernen" (z.B. wechselseitiges Unterrichten: "teaching is learning twice"). Unterschiede im Vorwissen können ausgeglichen und der Lernfortschritt in der Gruppe insgesamt maximiert werden. "Kooperatives Lernen" führt in der Regel

- zu erhöhter Studentenzufriedenheit und gesteigerter Lernleistung sowohl in der Gruppe als auch beim einzelnen Studierenden (im Vergleich zum herkömmlichen Individual-Studium, vgl. S.141 in [21]),
- zu insgesamt geringeren "Abbruchsquoten" und
- zu erhöhter intrinsischer Motivation und somit Tiefenverständnis (vgl. S.141 in [21]).

In den Augen des Autors hat das Lehrkonzept "Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team" langfristig Potential die Lehre qualitativ weiterzuentwickeln. Die Studierenden bleiben intrinsisch motiviert und lernen aktiv, problemlösungsorientiert und kooperativ. Aufgrund des klaren Praxisbezugs sind die Motivation für das Erlernen der nötigen Theorie(n) und der Feinheiten bei der Implementierung stets gegeben. Aktives Lernen, Tiefenverständnis und Kompetenzerwerb treten an die Stelle von "trägem [nicht aktiv nutzbarem] Wissen" (vgl. S.124 in [21]).
In nahezu allen Ingenieurwissenschaften ist die Formulierung einer klaren Problemstellung möglich und die Bearbeitung im Team praxisrelevant, somit lässt sich die Idee "Projektbezogen Studieren – Aktives Lernen im Team" auf die meisten Fachbereiche direkt übertragen.

Zu klären ist jeweils der finanzielle Aufwand für die Erweiterung der hierzu notwendigen studentischen Laboreinheiten (für das "Projektstudium Antriebstechnik" mussten 10.000 EUR einmalig investiert werden). Auch für größere Studentenzahlen kann das Projektstudium nahezu ohne weitere (dauerhafte) Kosten umgesetzt werden. Lediglich die Einmalausgaben für die Anschaffung der entsprechenden Laborausstattung sind zu tragen. Langfristige Kosten entstehen (wie im herkömmlichen Studium auch) durch Wartung und Beschaffung von Verbrauchsmaterial.
Durch die Umsetzung des beschriebenen Lehrkonzeptes soll wichtiges Erfahrungswissen generiert und für die (Weiter-)Entwicklung innovativer Hochschullehre an der TUM genutzt werden.

1.5 Danksagung

Der Autor möchte sich ganz besonders bei Prof. Dr. Florian Müller (Institut für Unterrichts- und Schulentwicklung, Uni Klagenfurt und Coach des "TUM ProLehre Intensivkurses") und Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Utschick (Studiendekan der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik) für die so fruchtenden Diskussionen und Anregungen bei der Ideenentwicklung und der Konzepterstellung des Projektstudiums Antriebstechnik bedanken.

Teil II

Projekte

Kapitel 2

Projekt 1: Gleichstrommaschine

Im ersten Teil des Projektstudiums Antriebstechnik wird die Gleichstrommaschine (GM) behandelt. Obwohl Gleichstrommaschinen in modernen Anlagen zunehmend von Drehfeldmaschinen verdrängt werden, kommen sie aufgrund ihrer einfachen Regelbarkeit nach wie vor in verschiedenen Anwendungen zum Einsatz, z.B. als Scheibenwischermotoren oder in elektrischen Zahnbürsten. Da sich die für die Gleichstrommaschine verwendeten Regelungskonzepte nach geeigneten Transformationen auf Drehfeldmaschinen übertragen lassen, ist ein gutes Verständnis der GM für die Behandlung von Drehfeldmaschinen vorteilhaft.

2.1 Problemstellung

Für eine fremderregte Gleichstrommaschine sollen

- Stromregelung (Anker- & Erregerstrom)
- Drehzahlregelung und
- Positionsregelung

entworfen, simuliert und implementiert werden. Als Regelkreisstruktur wird die (in der Industrie übliche) Kaskadenregelung verwendet: in den inneren Regelschleifen werden Anker- und Erregerstrom geregelt, während die äußereren Regelkreise Drehzahl- bzw. Positionsregelung übernehmen. Die kaskadierten Regelkreisstrukturen werden mithilfe von Matlab/Simulink entworfen, auf einem Realzeitsystem (Standard PC mit Realtime-Windows-Target von Mathworks) implementiert und an einer fremderregten Gleichstrommaschine getestet und ausgewertet.

Lernziele und -inhalte:

- Verstehen der Funktionsweise einer Gleichstrommaschine und eines 4-fach IGBT-Stromrichters (Mehrquadrantenpulssteller)
- Verdrahten des Laboraufbaus (u.a. Sechspuls-Diodengleichrichters (B6U), Antrieb, Realzeitsystem)
- Bestimmen der Streckenparameter von Gleichstrommaschine und 4-fach IGBT-Stromrichter
- Entwerfen, Implementieren und Bewerten der Strom-, Drehzahl- und Positionsregelung im Ankerstell- und Feldschwächbereich und

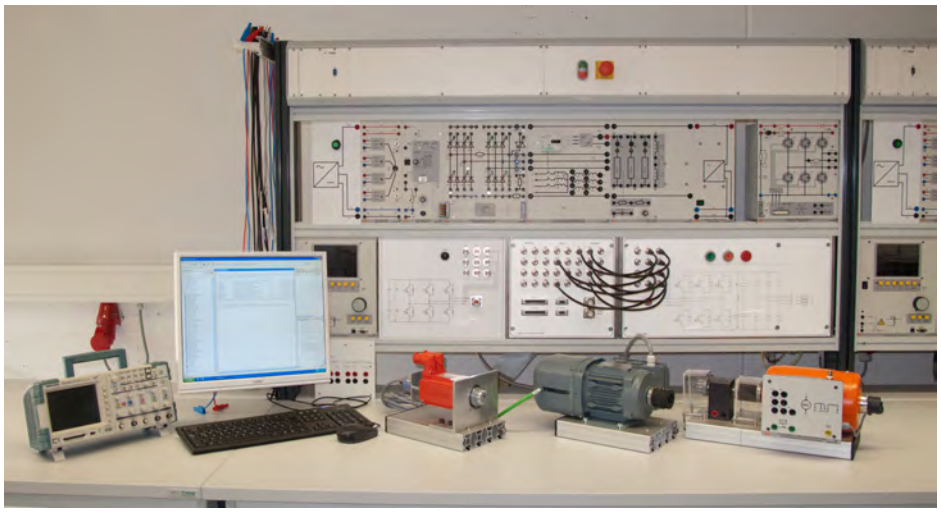


Abbildung 2.1: *Laborarbeitsplatz.*

- Rapid-Prototyping mithilfe von Matlab/Simulink von kaskadierten Regelkreisstrukturen auf einem Realtime-Windows-Target Desktoprechner.

2.2 Laboraufbau

Der praktische Teil des Projektes wird an einem Laborarbeitsplatz durchgeführt. Eine Übersicht des Arbeitsplatzes zeigt Abbildung 2.1. Ein Übersichtsplan der Komponenten, Verschaltung und der Mess- und Sollsignale ist in Abb. 2.2 dargestellt. Die verwendete fremderregte Gleichstrommaschine ist mit einem Tachogenerator ausgestattet, der starr an die Maschine gekoppelt ist (siehe Abbildung 2.3). Der Tachogenerator dient zur Erfassung der Motorwinkelgeschwindigkeit ω_M. An die GM können zwei unabhängige (Gleich-)Spannungen angelegt werden: Ankerspannung u_A und Erregerspannung u_E. Im hier betrachteten Ankerstellbereich wird u_E konstant gehalten, während u_A variiert wird und als einzige Stellgröße fungiert. Zur Erzeugung von u_A wird ein 4-fach IGBT-Stromrichter verwendet. Das IGBT-Modul ist in Abbildung 2.4 rechts dargestellt. Links in Abbildung 2.4 befindet sich ein RLC-Lastmodul, mit dem der Stromrichter zusätzlich belastet werden kann. Mittig ist das Netzteil zur Versorgung der Steuerelektronik mit 15 V Gleichspannung abgebildet. Die Erregerspannung u_E liefert ein Diodengleichrichter, der über einen Trenntansformator gespeist wird (siehe Abbildung 2.5). Als Messgrößen werden die Ankerspannung u_A^m, der Ankerstrom i_A^m sowie die Motorwinkelgeschwindigkeit ω_M^m erfasst. Sie werden nicht direkt gemessen, sondern jweils über eine zur Messgröße proportionale Spannung. Zur Verstärkung der gemessenen Spannungen ist ein Verstärkermodul vorhanden. Es ist in Abbildung 2.6 zusammen mit der Ansteuerelektronik für den IGBT-Stromrichter dargestellt. Als Schnittstelle zur I/O-Karte des Echtzeitrechners (xPC Windows Realtime Target von Mathworks) dient die in Abbildung 2.7 zusammen mit dem Messgerät zur Strom- oder Spannungsmessung gezeigte Buchsenplatte.

2.3 Simulation

Für die spätere Implementierung soll nun vorerst ein valides Modell der GM und des Vier-Quadrantenstellers erarbeitet, implementiert und mithilfe von Matlab/Simulink simuliert

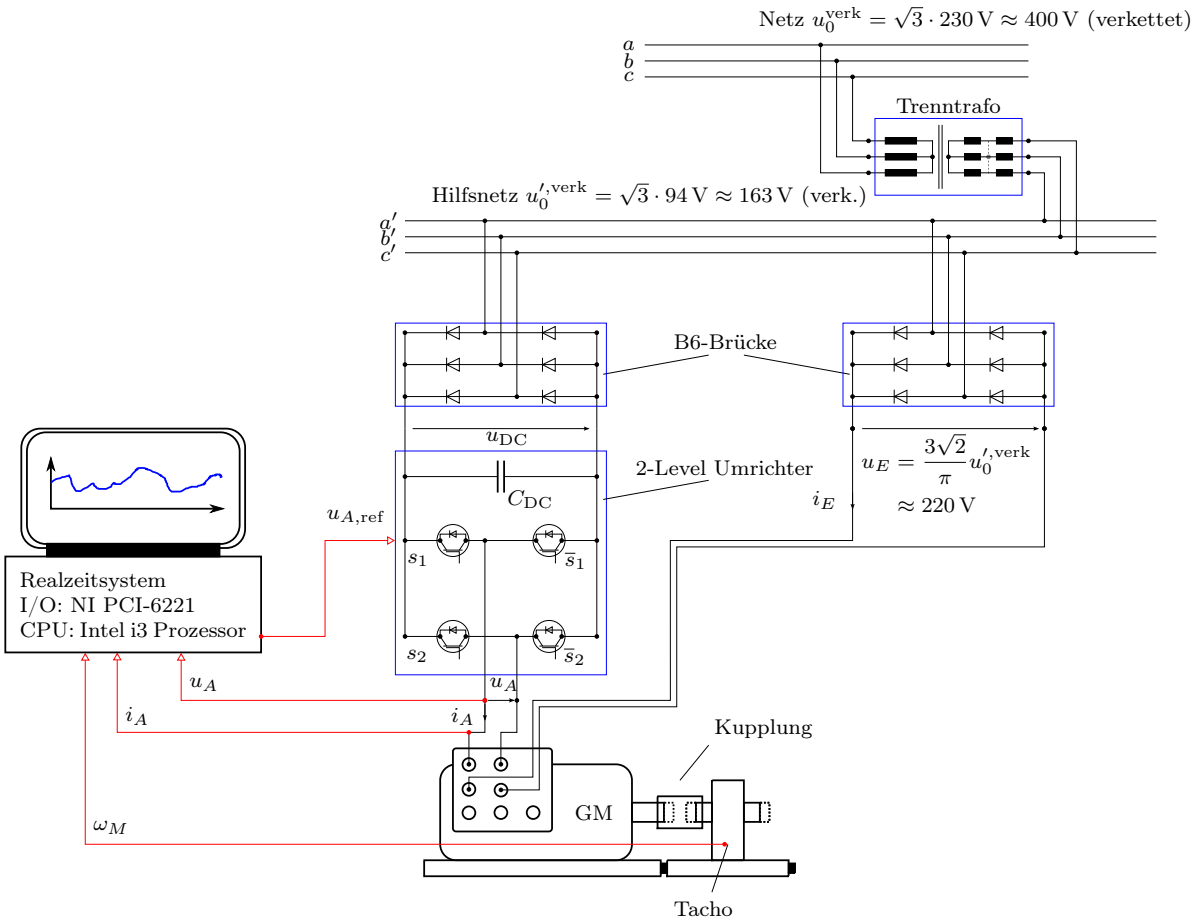
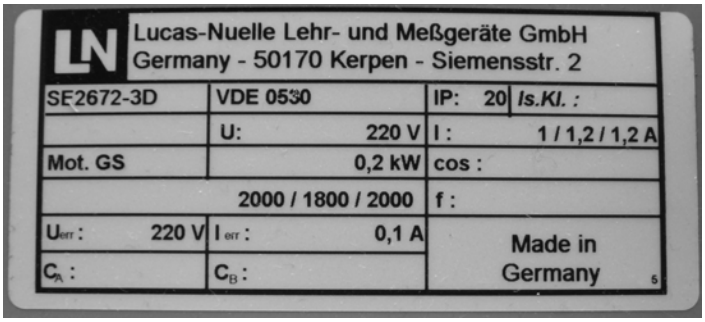


Abbildung 2.2: *Übersichtsbild des Laboraufbaus für GM (Projekt 1).*

(a) *GM mit Tachogenerator (links).*



(b) *Typenschild.*

Abbildung 2.3: *Gleichstrommaschine (GM) des Laboraufbaus.*

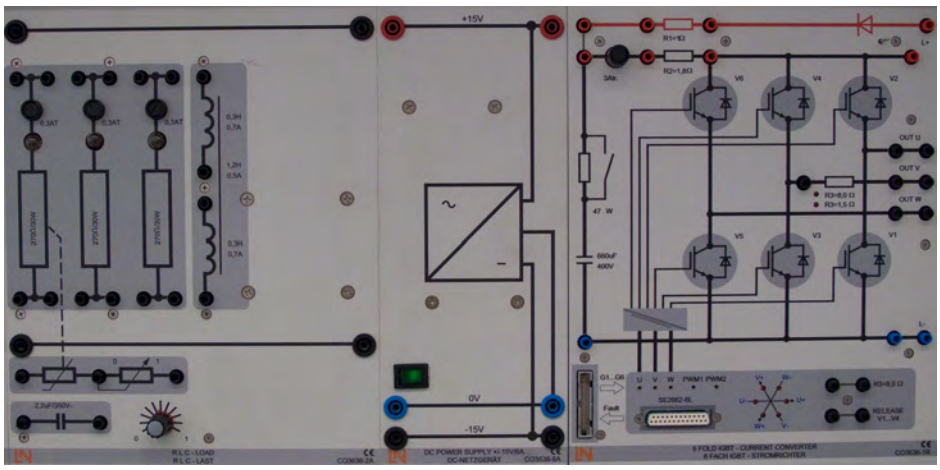


Abbildung 2.4: *RLC-Lastmodul, Netzteil, 4-fach IGBT-Modul (von links nach rechts).*

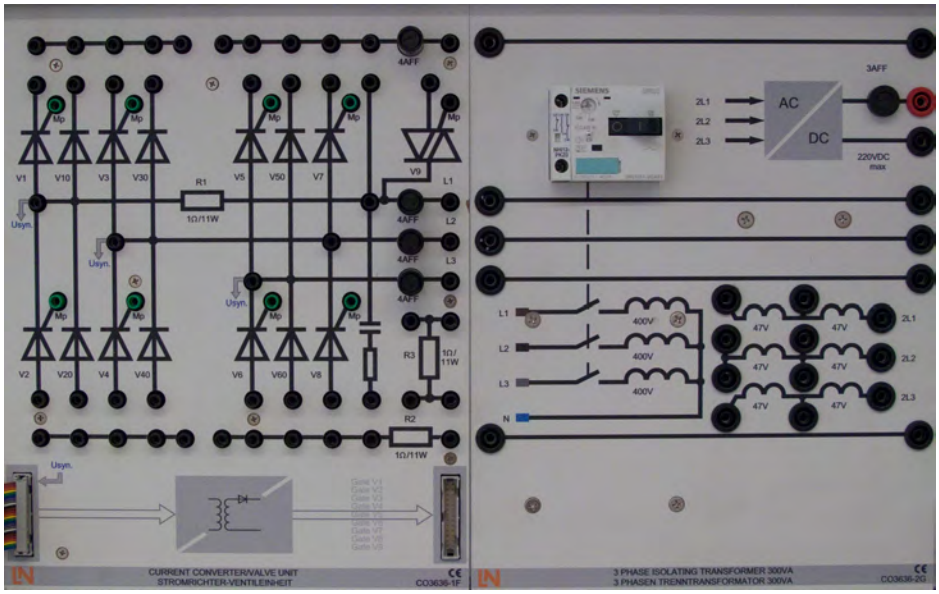


Abbildung 2.5: *Diodenmodul und Trenntansformator.*

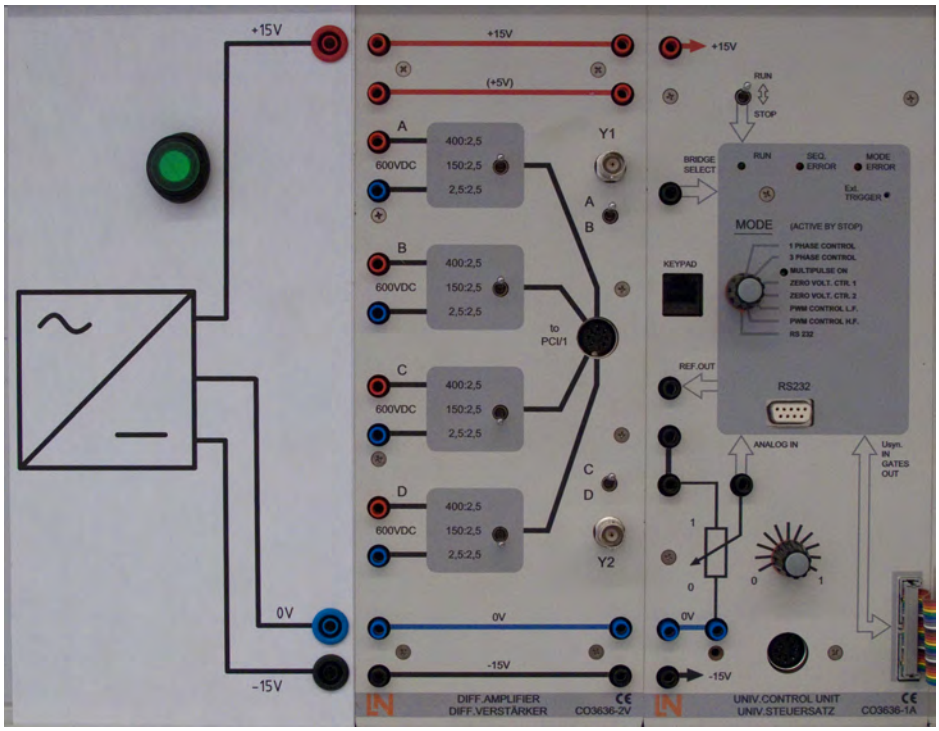


Abbildung 2.6: *Netzteil, Messverstärker und (Universal-)Ansteuerelektronik für den IGBT-Stromrichter.*

Abbildung 2.7: *Messgerät und Buchsenplatte zur Anbindung der I/O-Karte des Rechners.*

werden. Basierend auf den Modellen und deren Implementierung soll die kaskadierte Regelung des Antriebes erfolgen und simulativ getestet und validiert werden.

2.3.1 Modellbildung und Verhalten

> Hinweis: Um Ihnen die Implementierung (in Matlab/Simulink) zu erleichtern, nutzen Sie die unter `http://www.cres.mse.tum.de/index.php?id=eof` zur Verfügung gestellten Dateien `GM_Simulation.mdl` und `GM_Simulation_Init.m` (siehe `GM.zip`)!

2.3.1.1 Fremderregte Gleichstrommaschine (GM)

Eine **fremderregte GM** ist im Zeitbereich gegeben durch

$$\left.\begin{array}{rrcll} \text{Ankerkreis:} & u_A(t) & = & e_A(t) + R_A\, i_A(t) + L_A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, i_A(t) & ,i_A(0) = 0 \text{ [A]} \\ \text{Gegenspannung:} & e_A(t) & = & C_M \cdot \psi_E(t) \cdot \omega_M(t) & \\ \text{Magnetisierung:} & \psi_E(t) & = & f(i_E(t)) & \text{(nichtlinear)} \\ \text{Erregerkreis:} & u_E(t) & = & R_E\, i_E(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \psi_E(t) & ,\psi_E(0) = 0 \text{ [Vs]} \\ \text{Mechanik:} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \omega_M(t) & = & \frac{1}{\Theta_M}\big(m_M(t) - m_L(t)\big) & ,\omega_M(0) = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \\ \text{Motormoment:} & m_M(t) & = & C_M \cdot \psi_E(t) \cdot i_A(t). & \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Hierbei sind u_A [V] die Ankerspannung (Stelleingang des Ankerkreises), u_E [V] die Erregerspannung (Stelleingang des Erregerkreises), i_A, i_E [A] der Anker- bzw. Erregerstrom, R_A, R_E [Ω] der Anker- bzw. Erregerwiderstand, L_A $\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$ die Ankerinduktivität, e_A [V] die (induzierte) Gegenspannung, C_M [1] die Motorkonstante, ψ_E [Vs] die Erregerflussverkettung mit nichtlinearer Magnetisierungskennlinie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [Vs], ω_M $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ die Motorwinkelgeschwindigkeit, Θ_M $\left[\text{kg}\,\text{m}^2\right]$ die (Rotor-)Trägheit, m_M [Nm] das Motormoment und m_L [Nm] das Lastmoment (Störung bzw. Reibung).

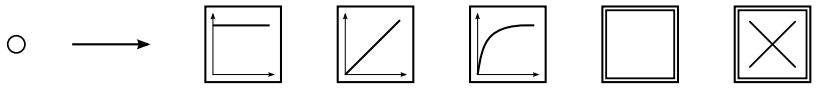
Als direkte **Messgrößen** sollen Ihnen im Folgenden, der Ankerstrom $i_A(t)$, der Erregerstrom $i_E(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega_M(t)$ zur Verfügung stehen. Des Weiteren kennen Sie die nichtlineare **Magnetisierungskennlinie** $f(i_E)$ in Abhängigkeit des Erregerstromes.

Aufgabe 2.3.1 (Nichtlinearer Signalflussplan der fremderregten GM)**.**
Im Folgenden gelte: $f(\cdot)^{-1}$ existiere auf $\mathbb{R}$, d.h. der Erregerstrom $i_E = f^{-1}(\psi_E)$ kann eindeu-

Kenndaten des Versuchsaufbaus		
Beschreibung	**Symbol & Wert**	**Einheit**
Nennleistung (mechanisch)	$P_N = 0.2$	[kW]
Nenndrehzahl	$n_{MN} = 2000$	$\left[\frac{1}{\text{min}}\right]$
Nennankerspannung	$u_{AN} = 230$	[V]
Nennankerstrom	$i_{AN} = 1$	[A]
Nennerregerspannung	$u_{EN} = 230$	[V]
Nennerregerstrom	$i_{EN} = 0.1$	[A]
max. Drehzahl	$n_{M,max} = 6000$	$\left[\frac{1}{\text{min}}\right]$
Ankerinduktivität	$L_A = 380 \cdot 10^{-3}$	$\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$
Ankerwiderstand	$R_A = 16.7$	[Ω]
Erregerwiderstand	$R_E = 2.3$	[kΩ]
Rotorträgheitsmoment	$\Theta_M = 0.0014$	$\left[\text{kg m}^2\right]$
Maschinenkonstante	$C_M = \frac{5}{4\pi}$	[1]
Periodendauer des Gleichrichters	$T = \frac{1}{1800}$	[s]
Zwischenkreisspannung	$u_{\text{DC}} = 540$	[V]

Tabelle 2.1: *Parameter und Kenndaten einer Gleichstrommaschine.*

tig als Funktion der Flussverkettung ψ_E dargestellt werden (Vernachlässigung von z.B. Hysterese). Es soll der gesamte Signalflussplan (im Zeitbereich) aufgestellt werden, verwenden Sie hierzu folgende Symbole



für Summationsstelle, Signalpfad, Konstante, Integrator, PT_1-Strecke, nichtlineare Funktion bzw. Multiplikation.

(a) Zeichnen Sie den Signalflussplan des Ankerkreises (Eingänge: u_A & e_A; Ausgang: i_A)!

(b) Zeichnen Sie den Signalflussplan der Mechanik (Eingänge: i_A, ψ_E & m_L; Ausgang: ω_M)!

(c) Zeichnen Sie den Signalflussplan der Gegenspannung (Eingänge: ψ_E & ω_M; Ausgang: e_A)!

(d) Zeichnen Sie den Signalflussplan des Erregerkreises (Eingang: u_E; Ausgang: ψ_E)!

(e) Zeichnen Sie mit den obigen Ergebnissen den gesamten nichtlinearen *Signalflussplan der fremderregten GM (Eingänge: u_A, u_E & m_L; Ausgang: ω_M)!*

Aufgabe 2.3.2 (Funktionsweise im Nennbetrieb)**.**
Es wird die vereinfachte nichtlineare Magnetisierungskennlinie

$$\psi_E(i_E) = \psi_{E0} \arctan\left(i_E/i_{E0}\right), \qquad \psi_{E0} > 0\ [\text{Vs}], \quad i_{E0} = 0.01 > 0\ [\text{A}] \tag{2.2}$$

ohne Hysterese-Effekte angenommen. Dabei gilt $\psi_{E0} = \psi_{EN}/\arctan(i_{EN}/i_{E0})$ [Vs], so dass sich für den Nennstrom i_{EN} [A] der Nennfluss ψ_{EN} [Vs] einstellt. Die zu untersuchende Gleichstrommaschine habe die Kenndaten in Tabelle 2.1:

(a) Berechnen Sie Nennwinkelgeschwindigkeit ω_{MN} [rad/s] und Nennmoment m_{MN} [Nm]!

(b) Berechnen Sie Nennflussverkettung ψ_{EN} [Vs] im Nennpunkt!

(c) Berechnen Sie Leerlaufwinkelgeschwindigkeit ω_{0MN} [Nm]! Was bedeutet Leerlauf?

(d) Welche Sollerregerspannung $u_{E,\text{ref}}$ [V] muss am Erregerkreis anliegen, so dass sich Nennflussverkettung $\psi_E = \psi_{EN}$ einstellt?

(e) Welche Sollankerspannung $u_{A,\text{ref}}$ [V] muss am Ankerkreis anliegen, so dass sich die Leerlaufwinkelgeschwindigkeit ω_{0MN} einstellt?

(f) Öffnen Sie `GM_Simulation.mdl` *und initialisieren Sie das Modell mithilfe der Datei* `GM_Simulation_Init.m`*! Ergänzen Sie diese um die Parametern aus Tabelle 2.1!*

(g) Geben Sie Erregerkreis und Ankerkreis die oben berechneten Sollspannungssprünge

$$u_E(t) = u_{E,\text{ref}} \cdot \sigma(t - t_E) \quad \text{und} \quad u_A(t) = u_{A,\text{ref}} \cdot \sigma(t - t_A)$$

zu den Zeitpunkten $t_E = 0.0$ [s] und $t_A = 0.5$ [s] vor und belasten Sie die Gleichstrommaschine zum Zeitpunkt $t_L = 1.5\,s$ mit dem Nennmoment, d.h. $m_L(t) = m_{MN} \cdot \sigma(t - t_L)$! Überprüfen Sie die Funktionsweise im Nennbetrieb!

2.3.1.2 Vierquadrantensteller

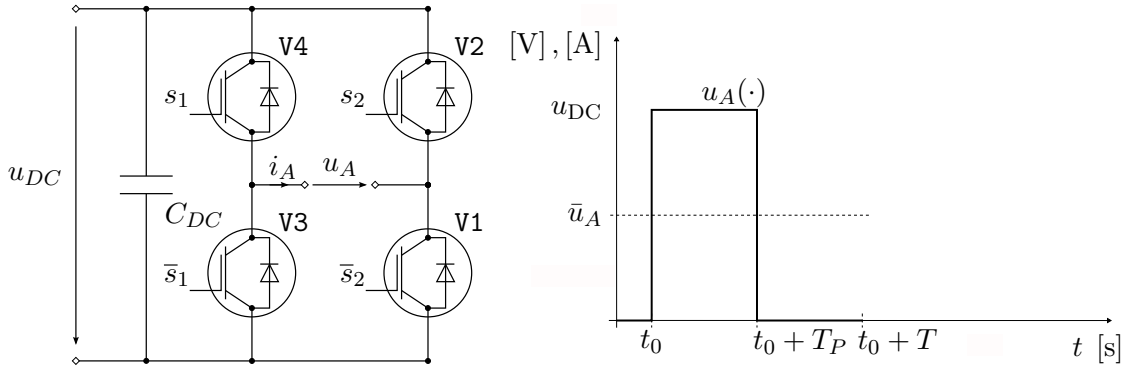
Der Ankerkreis der GM werden mithilfe eines Vierquadrantenstellers (Stromrichter) gespeist (siehe Abb. 2.8(a)). Die Ventile `V1` bis `V4` (hier: IGBTs mit Freilaufdioden) können vereinfacht als Schalter betrachtet werden, die durch Vorgabe der Gate-Signale s_1, $\overline{s}_1$, s_2 und $\overline{s}_2$ geöffnet bzw. geschlossen werden können (auch wenn stromführend). Im Folgenden werden die Schaltsignale als binäre Signale aufgefasst, d.h. s_1, $\overline{s}_1$, s_2 und $\overline{s}_2$ können 0 oder 1 als Wert annehmen. Um einen Kurzschluss der Zwischenkreisspannung u_{DC} zu vermeiden, dürfen oberes und unteres Ventil *nicht* gleichzeitig leiten. Dies wird durch Anlegen entsprechend negierter Schaltsignale für oberes bzw. unteres Ventil sichergestellt, d.h. es gilt *immer* $s_1 = \neg\overline{s}_1$ und $s_2 = \neg\overline{s}_2$. Für $s_1 = 1$ und $\overline{s}_1 = \neg s_1 = 0$ sind beispielsweise `V4` kurzgeschlossen und `V3` geöffnet, etc. Durch entsprechendes 'Durchschalten' von Ventilpaaren (z.B. `V2` $\wedge$ `V3`) kann die Spannung u_A folgende Werte annehmen:

$$\begin{aligned}
s_1 = \overline{s}_2 = 1 \ \wedge \ s_2 = \overline{s}_1 = 0 &\xRightarrow{\texttt{V4 \& V1 geschlossen}} u_A = u_{\text{DC}} \\
s_1 = \overline{s}_2 = 0 \ \wedge \ s_2 = \overline{s}_1 = 1 &\xRightarrow{\texttt{V3 \& V2 geschlossen}} u_A = -u_{\text{DC}} \\
s_1 = s_2 = 1 \ \wedge \ \overline{s}_1 = \overline{s}_2 = 0 &\xRightarrow{\texttt{V4 \& V2 geschlossen}} u_A = 0 \text{ [V]} \\
s_1 = s_2 = 0 \ \wedge \ \overline{s}_1 = \overline{s}_2 = 1 &\xRightarrow{\texttt{V3 \& V1 geschlossen}} u_A = 0 \text{ [V]}
\end{aligned}$$

Durch einen netzgeführten Gleichrichter (B6-Brücke) wird bei Belastung (Stromfluss ungleich Null) die Zwischenkreisspannung u_{DC} am Zwischenkreiskondensator C_{DC} [As/V] (annähernd) konstant gehalten. Der 4-fach IGBT-Stromrichter arbeitet mit einer Schaltfrequenz von $f = 1/T > 0$ [Hz], d.h. innerhalb der Periodendauer T [s] kann einmal der Schaltzustand geändert werden.

Aufgabe 2.3.3 (Funktionsprinzip und approximiertes Modell des Vierquadrantenstellers)**.**

(a) Abhängig von der Pulsbreite $T_P(t_0)$ [s] (mit $-T \leq T_P(t_0) \leq T$) und der zur Verfügung stehenden Zwischenkreisspannung u_{DC} ergibt sich für das Ventilpaar `V2` $\wedge$ `V3` *(bzw.* `V1` $\wedge$ `V4`*) eine mittlere Spannung $\bar{u}_A$ (pro Periode, siehe Abb. 2.8(b)). Berechnen Sie $\bar{u}_A(t_0+T)$ zum Zeitpunkt $t_0 + T \geq 0$ [s]!*



(a) *Vierquadrantensteller (Stromrichter) mit Ventilen* `V1-V4` *(inkl. Dioden), Zwischenkreisspannung* u_{DC} [V], *Zwischenkreiskondensator* C_{DC} [As/V] *und Ausgangsspannung* u_A [V] *(später: Ankerspannung).*

(b) *Pulsweitenmodulation (PWM) mit konstanter Periodendauer* T [s], *variabler Pulsbreite* T_P [s] *und konstanter Zwischenkreisspannung* u_{DC} [V]*: Spannungsverlauf* $u_A(\cdot)$ *mit Mittelwert* $\bar{u}_A$.

Abbildung 2.8: *4-fach IGBT-Stromrichter und Pulsweitenmodulation (positive Ankerspannung)*

(b) $T_p(t)$ *wird zum Zeitpunkt* $t_0 < t \leq t_0 + T$ *verstellt. Wann erfolgt das nächste Schalten des Vierquadrantenstellers? Wann "liegt" die neue mittlere Spannung* $\bar{u}_A$ *am Ausgang an?*

(c) Skizzieren Sie in Abb. 2.8(b) den Stromverlauf $i_A(\cdot)$ *auf dem Intervall* $[t_0, t_0 + T]$ *für eine rein induktive Last, d.h.* $\frac{d}{dt} i_A(t) = 1/L_A u_A(t)$*! (Annahme:* $i_A(t) > 0$*)*

(d) Wie ändert sich der Stromverlauf $i_A(\cdot)$ *für eine ohmsch-induktive Last, d.h.* $u_A(t) = R_A i_A(t) + L_A \frac{d}{dt} i_A(t)$*? Skizzieren Sie den Verlauf qualitativ in Abb. 2.8(b)!*

(e) Welche "Totzeit" besitzt der Stromrichter? Ergibt sich für alle Pulsbreiten $0 \leq T_P \leq T$ *diese Totzeit?*

(f) Es soll eine (mittlere) Referenzspannung $-u_{DC} < u_{A,\mathrm{ref}} < u_{DC}$ *gestellt werden. Berechnen Sie nötige Referenz-Pulsbreite* $T_{p,\mathrm{ref}}$*!*

(g) Zeichnen Sie den Signalfluss des Vierquadrantenstellers mit Eingang $u_{A,\mathrm{ref}}$ *und Ausgang* $\bar{u}_A$ *(Hinweis: Für eine Totzeitstrecke nutzen Sie folgenden Block:* *)!*

(h) Was passiert für eine schwankende Zwischenkreisspannung, d.h. $u_{DC}(t) \neq const.$*?*

(i) Für konstantes u_{DC} *approximieren Sie das dynamische Modell als* PT_1*-Strecke! Unter welcher Voraussetzung ist diese Vereinfachung zulässig?*

(j) Bestimmen Sie Verstärkung V_{str} *und Zeitkonstante* T_{str} *des Stromrichters!*

(k) Implementieren Sie das lineare Streckenmodell (Totzeitglied) des Vierquadrantenstellers aus Aufgabe 2.3 (g) in `GM_Simulation.mdl` *für Anker- und Erregerkreis! Wiederholen Sie Aufgabe 2.2 (f)! Ergeben Sich Unterschiede?*

2.3.2 Regelung im Ankerstellbereich (d.h. $\psi_E = \psi_{EN}$)

Im Folgenden wird der Stromrichter vereinfachend als PT_1-Strecke $\frac{u_A(s)}{u_{A,\mathrm{ref}}(s)} = \frac{V_{\mathrm{str}}}{1+s\,T_{\mathrm{str}}}$ modelliert (d.h. $\bar{u}_A(t) = u_A(t)$ für alle $t \geq 0$). Der Erregerkreis ist so bestromt, dass sich für die Flussverkettung der Nennfluss einstellt, d.h. $\psi_E(t) = \psi_{EN}$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 2.3.4 (Ankerstromregelung)**.**

(a) Bestimmen Sie die Streckenübertragungsfunktion $F_{S,\omega_M}(s) = \frac{\omega_M(s)}{u_A(s)}$!

(b) Für welche Trägheitswerte Θ_M besitzt die Streckenübertragungsfunktion $F_{S,\omega_M}(s) = \frac{\omega_M(s)}{u_A(s)}$ konjugiert komplexe Pole. Können Sie nach BO oder SO optimieren?

(c) In welchem Fall können Sie die Rückkopplung der Gegenspannung e_A vernachlässigen? Ist dann eine EMK-Aufschaltung erforderlich?

(d) Entwerfen Sie eine EMK-Aufschaltung (Hinweis: Störgrößenaufschaltung) unter Berücksichtigung der approximierten Dynamik des Vierquadrantenstellers! Was müssen Sie bei der Auslegung der EMK-Aufschaltung beachten?

(e) Können Sie die Gegenspannung $e_A(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e_A(s)$ messen bzw. "nachbilden"? Wie?

(f) Unter der Annahme einer idealen EMK-Kompensation wählen Sie einen Stromregler $F_{R,i_A}(s) = \frac{u_{A,\mathrm{ref}}(s)}{i_{A,\mathrm{ref}}(s)-i_A(s)}$ für die Strecke $F_{S,i_A}(s) = \frac{i_A(s)}{u_{A,\mathrm{ref}}(s)}$ mithilfe der Optimierungstabelle aus! Welches Optimierungskriterium wenden Sie an? Warum?

(g) Bestimmen Sie Streckenverstärkung V_{S,i_A}, die kleine T_{σ,i_A} und die große T_{1,i_A} Zeitkonstante von $F_{S,i_A}(s)$! Legen hiermit Sie die Reglerparameter von $F_{R,i_A}(s)$ fest!

(h) Implementieren Sie die EMK-Aufschaltung und die Stromregelung der fremderregten GM in `GM_Simulation.mdl`*! Ergänzen Sie die Reglerparametrierung und Störgrößenaufschaltung in* `GM_Simulation_Init.m`*!*

(i) Simulieren Sie das Verhalten des Regelkreises bei einer rechteckigen Verlauf des Stromsollwertes

$$i_{A,\mathrm{ref}}(t) = \frac{i_{AN}}{2}(\sigma(t-t_A) - \sigma(t-2t_A)),$$

d.h. ab $t_A = 0.5\,s$ soll der halbe Nennstrom eingeprägt werden.

(j) Bestimmen Sie Anregelzeit, Ausregelzeit (bei einem Toleranzband von $\pm 2\%$) und maximales Überschwingen! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Vorgaben der Optimierungstabelle. Gibt es Abweichungen (Begründung)?

(k) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$F_{RK,i_A}(s) = \frac{i_A(s)}{i_{A,\mathrm{ref}}(s)} = \frac{F_{R,i_A}(s)F_{S,i_A}(s)}{1 + F_{R,i_A}(s)F_{S,i_A}(s)}$$

des geschlossenen Stromregelkreises!

(l) Unter welcher Annahme können Sie den Regelkreis $F_{RK,i_A}(s)$ als PT_1-Strecke

$$F^{\mathrm{ers}}_{RK,i_A}(s) = \frac{1}{1 + sT_{\mathrm{ers},i_A}} \approx F_{RK,i_A}(s) = \frac{i_A(s)}{i_{A,\mathrm{ref}}(s)} \tag{2.3}$$

approximieren? Bestimmen Sie für diesen Fall die Ersatzzeitkonstante T_{ers,i_A}!

Aufgabe 2.3.5 (Ankerstromregelung **mit Stromistwertglättung**).
Die Strommessung sei stark verrauscht. Daher implementieren Sie im Rückführzweig zusätzlich ein Stromistwertglättung mit Tiefpassfilter

$$F_{g,i_A}(s) = \frac{\hat{i}_A(s)}{i_A(s)} = \frac{1}{1 + s\,T_{g,i_A}}. \tag{2.4}$$

mit Zeitkonstante $T_{g,i_A} > 0$ [s] (wobei gelte $T_{g,i_A}, T_{\text{str}} \ll T_A$). Die EMK-Aufschaltung kompensiere den Einfluss der Gegenspannung vollständig.

(a) Ergänzen Sie den Signalflussplan (Ankerkreis) aus Aufgabe 2.1 um die Stromistwertglättung!

(b) Stellen Sie die relevante Streckenübertragungsfunktion

$$F'_{S,i_A}(s) = \frac{\hat{i}_A(s)}{u_{A,\text{ref}}(s)} = \frac{V_{S,i_A}}{(1 + s\,T_{\sigma,i_A})(1 + s\,T_{1,i_A})} \tag{2.5}$$

auf! Bestimmen Sie die kleine Summationszeitkonstante $T_{\sigma,\,i_A}$ [s] und die große Zeitkonstante $T_{1,\,i_A}$ [s] der Strecke $F_{\hat{i}_A}(s)$ und deren Verstärkung $V_{S,\,i_A}$ [A/V]! (Hinweis: Addition der beiden kleinen Zeitkonstanten!)

(c) Entwerfen Sie mithilfe der Optimierungstabelle einen Stromregler

$$F'_{R,i_A}(s) = \frac{u_{A,\text{ref}}(s)}{i_{A,\text{ref}}(s) - \hat{i}_A(s)} \tag{2.6}$$

für gutes Führungsverhalten! Welches Optimierungskriterium wenden Sie an?

(d) Wiederholen Sie die Teilaufgaben (h)-(j)! Es gelte $T_{g,i_A} = 0.005$ [s].

(e) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$F'_{RK,\hat{i}_A}(s) = \frac{\hat{i}_A(s)}{i_{A,\text{ref}}(s)} = \frac{F'_{R,i_A}(s)\,F'_{S,\hat{i}_A}(s)}{1 + F'_{R,i_A}(s)\,F'_{S,\hat{i}_A}(s)} \tag{2.7}$$

des geschlossenen Stromregelkreises mit Istwertglättung und entsprechender Reglerauslegung!

(f) Wiederholen Sie Teilaufgabe 2.4 (l)! Verwenden Sie hierbei die Übertragungsfunktion (2.5) und beachten Sie den Zusammenhang zwischen $i_A(s)$ und $\hat{i}_A(s)$ aufgrund der Stromistwertglättung (2.4)! Wie groß ist T'_{ers,i_A} mit Istwertglättung? (Hinweis: Polynomdivision notwendig!)

Aufgabe 2.3.6 (Drehzahlregelung).

(a) Stellen Sie mithilfe der Ersatzübertragungsfunktion (2.3) die (genäherte) Streckenübertragungsfunktion

$$F_{S,\omega_M}(s) = \frac{\omega_M(s)}{i_{A,\text{ref}}(s)} = \frac{V_{S,\,\omega_M}}{s\,T_{1,\omega_M}(1 + s\,T_{\sigma,\omega_M})} \tag{2.8}$$

für den Drehzahlreglerentwurf auf!

(b) *Bestimmen Sie die kleine Summationszeitkonstante* T_{σ,ω_M} *und die Verstärkung* V_{S,ω_M} *der Strecke* $F_{S,\omega_M}(s)$ *für Nennflussverkettung* $\psi_E = \psi_{EN} = konst.$ *und große Zeitkonstante* $T_{1,\omega_M} = 1$ [s]. *Warum ist diese Wahl für* T_{1,ω_M} *zulässig?*

(c) *Welcher Streckentyp liegt vor?*

(d) *Mithilfe der Optimierungstabelle wählen und parametrieren Sie den Drehzahlregler*

$$F_{R,\omega_M(s)} = \frac{i_{A,\mathrm{ref}}(s)}{\omega_{M,\mathrm{ref}}(s) - \omega_M(s)}!$$

Benötigen Sie einen integralen Anteil im Regler? Wenn ja, warum?

(e) *Erweitern Sie* `GM_Simulation.mdl` *und* `GM_Simulation_Init.m` *um den entworfenen Drehzahlregler! Simulieren Sie für* $t_\omega = 0.5\,s$ *das Verhalten des Regelkreises bei sprungförmiger Änderung des Drehzahlsollwertes*

$$\omega_{M,\mathrm{ref}}(t) = \frac{\omega_{MN}}{2} \cdot \sigma(t - t_\omega)!$$

(f) *Bestimmen Sie wieder Anregelzeit, Ausregelzeit und maximales Überschwingen (für den ersten Sprung). Gibt es Abweichungen zu den Vorgaben in der Optimierungstabelle (Begründung)?*

(g) *Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Drehzahlregelkreises*

$$F_{RK,\omega_M}(s) = \frac{\omega_M(s)}{\omega_{M,\mathrm{ref}}(s)} = \frac{F_{R,\omega_M}(s)F_{S,\omega_M}(s)}{1 + F_{R,\omega_M}(s)F_{S,\omega_M}(s)} \tag{2.9}$$

(h) *Bestimmen Sie mithilfe der Optimierungstabelle die Überschwingweite! Weshalb kommt es zu einem Überschwingen?*

(i) *Wie können Sie das Überschwingen des geschlossenen Regelkreises reduzieren?*

(j) *Implementieren Sie die Maßnahme in* `GM_Simulation.mdl` *und ergänzen Sie* `GM_Simulation_Init.m` *entsprechend!*

(k) *Erweitern Sie ihre Solltrajektorie um einen zweiten Sollwertsprung, so dass sich folgender Verlauf*

$$\omega_{M,\mathrm{ref}}(t) = \frac{\omega_{MN}}{2} \cdot \left(\sigma(t - t_\omega) + \frac{3}{2}\sigma(t - 5t_\omega)\right)$$

einstellen wird. Wird der Sollwert von $2\omega_{MN}$ *nach dem zweiten Sprung erreicht? Wie hoch ist hierbei die (dauerhaft) anliegende Ankerspannung? Sehen Sie Schwierigkeiten?*

(l) *Berechnen Sie aus* $n_{M,\max}$ *die maximal zulässige Winkelgeschwindigkeit* $\omega_{M,\max}$*! Kann diese erreicht werden, ohne die Maschine zu schädigen?*

2.3.3 Regelung im Feldschwächbereich (d.h. $\psi_E \leq \psi_{EN}$)

Um den vollen Drehzahlbereich $|\omega_M| \leq \omega_{M,\max}$ der Maschine ausnutzen zu können, braucht man noch zusätzlich eine Eingriffsmöglichkeit, um den Erregerfluss ψ_E zu beeinflussen. Hierzu wird eine Erregerstromregelung entworfen und entsprechend Abb. 2.10 implementiert. Das Prinzip entspricht der Ankerstromregelung (vgl. Abb. 2.10). Zu beachten ist jedoch die nichtlineare Magnetisierungskennlinie (2.2) zur Erzeugung des Flusses ψ_E. Hierzu soll eine

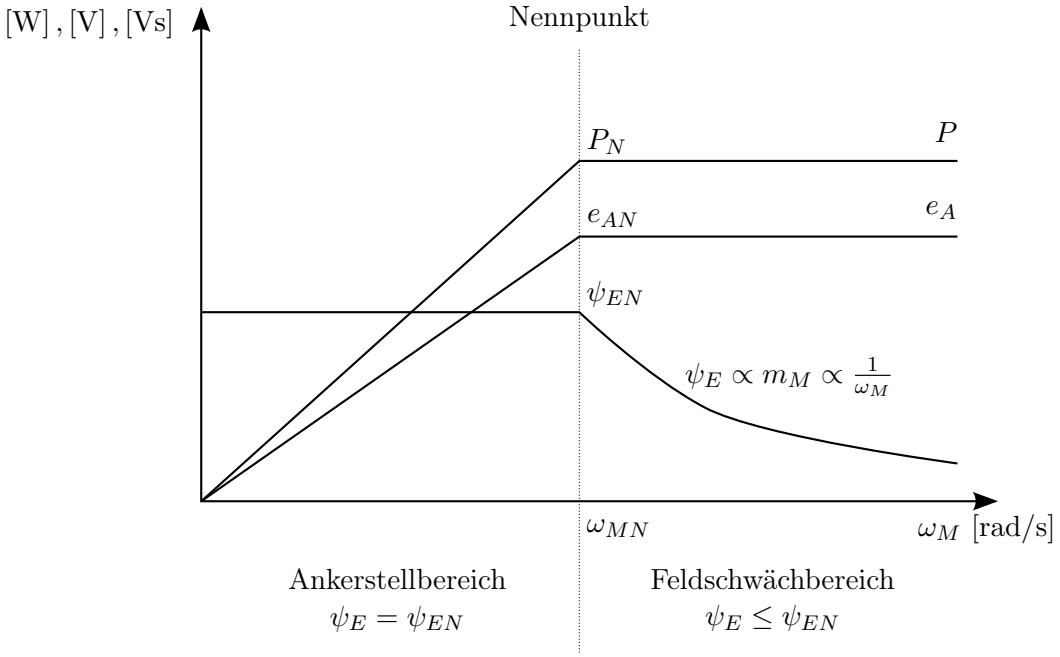


Abbildung 2.9: *Betriebsbereiche eines Gleichstromantriebes.*

geeignete Approximation gefunden werden, die näherungsweise eine lineare Reglerauslegung zulässt.

Wie aus Abb. 2.9 abzulesen ist, wird im Ankerstellbereich bei konstantem Fluss $\psi_E = \psi_{EN}$ (Nennerregerfluss) die Drehzahl über die Ankerspannung gesteuert bzw. geregelt, bis die Nenngegenspannung e_{AN} erreicht ist. Möchte man die Drehzahl weiter steigern, ohne die Maschine zu überlasten (d.h. Ankerstrom i_A und Ankerspannung u_A nicht *dauerhaft* über ihre Nenngrößen erhöhen), muss das Erregerfeld – also der Fluss ψ_E – geschwächt werden, damit die Gegenspannung e_A nicht weiter ansteigt. Dabei muss der Fluss $\psi_E \propto 1/|\omega_M|$ umgekehrt proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω_M gesenkt werden. Dadurch ergibt sich jedoch bei Nennankerspannung $u_A = u_{AN}$ und Nennankerstrom $i_A = i_{AN}$ eine Reduzierung des nutzbaren Drehmoments $m_M \propto \psi_E\, i_{AN}$. Nur so ermöglicht die Feldschwächung, ohne Überdimensionierung des Antriebes (Nennleistung), einen erweiterten Drehzahlbereich.

Aufgabe 2.3.7 (Erregerstromregelung)**.**

(a) Bestimmen Sie die maximal zulässige Winkelgeschwindigkeit $\omega_{M,\max}$! Nutzen Sie die Daten aus Tabelle 2.1!

(b) Welcher Erregerfluss $\psi_{E,\min}$ muss eingestellt werden, um $\omega_{M,max}$ zu erreichen und dabei nicht dauerhaft Ankernennspannung u_{AN} und Ankernennstrom i_{AN} zu überschreiten?

(c) Zeichnen Sie $\psi_{E,\,min}$ in Abb. 2.11 ein und markieren sie den zugehörigen Strom $i_{E,\min}$!

(d) Betrachten Sie Abb. 2.11! Warum macht eine Linearisierung der Magnetisierungskennlinie (2.2) um $i_E = 0$ [A] als auch $i_E = i_{EN}$ keinen Sinn? Welche Näherung schlagen Sie vor? (Hinweis: Sekanteninduktivität!)

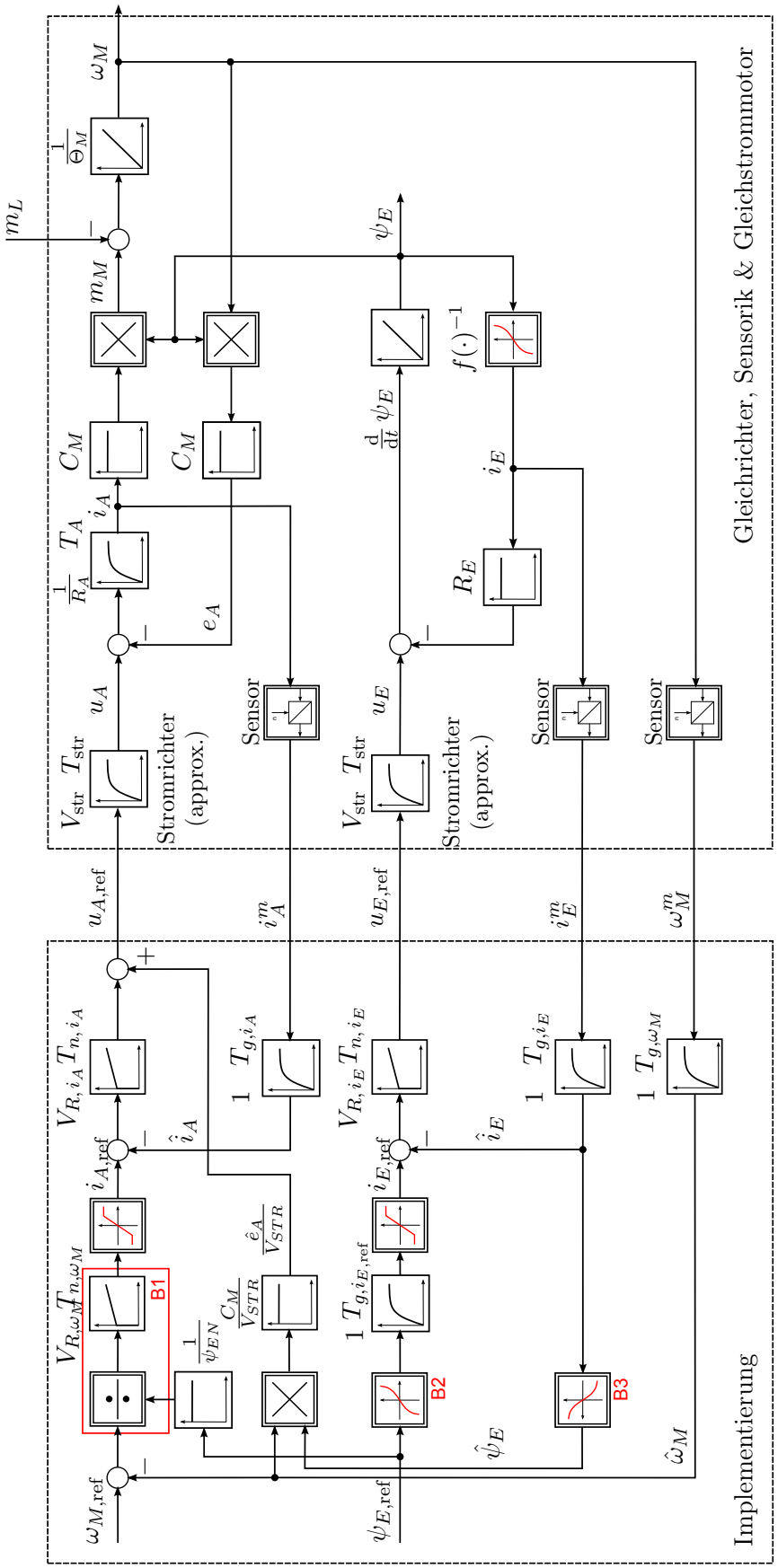


Abbildung 2.10: *Signalflussplan einer geregelten fremderregten GM mit Feldschwächung.*

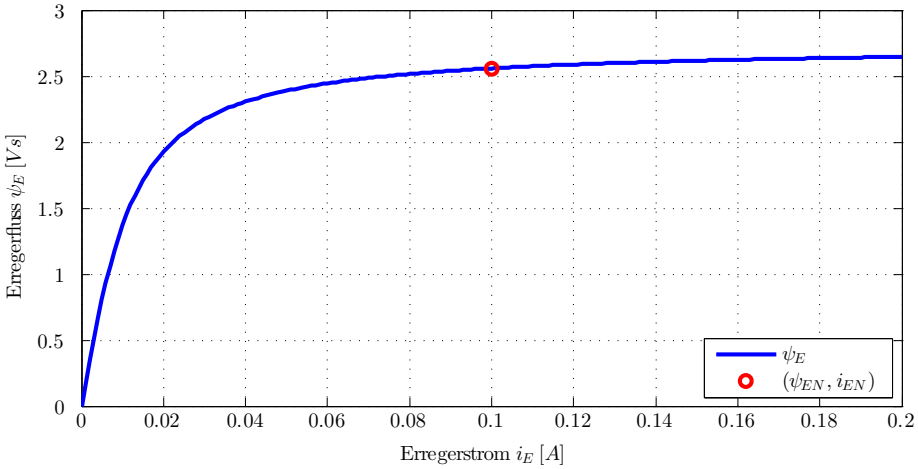


Abbildung 2.11: *Nichtlineare Magnetisierungskennlinie wie in (2.2) (ohne Hysterese).*

(e) Wie sieht die genäherte *lineare Streckenübertragungsfunktion*

$$F_{S,\hat{i}_E}(s) = \frac{\hat{i}_E(s)}{u_{E,\mathrm{ref}}(s)}$$

des Erregerstromkreises unter Vernachlässigung der Spannungsbegrenzung aus? Beachten Sie die Messwertglättung in der Strecke mit $T_{g,i_E} = 0.002$ [s]! Bestimmen Sie die kleine Zeitkonstante T_{σ,i_E}, die große Zeitkonstante T_{1,i_E} und die Verstärkung V_{S,i_E} der Strecke!

(f) Entwerfen Sie mithilfe der Optimierungstabelle einen Erregerstromregler

$$F_{R,i_E}(s) = \frac{u_{E,\mathrm{ref}}(s)}{i_{E,\mathrm{ref}}(s) - \hat{i}_E(s)}!$$

Benötigen Sie einen Regler mit integralem Anteil?

(g) Wie kann aus einem gegebenen Sollerregerfluss $\psi_{E,\mathrm{ref}}$ der entsprechende Sollerregerstrom $i_{E,\mathrm{ref}}$ bestimmt werden? Sehen Sie Schwierigkeiten bei der Implementierung von `B2` *und der so realisierten Stromsollwertgenerierung?*

(h) Erweitern Sie Ihre Implementierung in `GM_Simulation.mdl` *und* `GM_Simulation_Init.m`*, um den entworfenen Erregerstromregler und die invertierte Magnetisierungskennlinie (siehe* `B2` *in Abb. 2.10).* Deaktivieren *Sie die Sensorik durch Eingabe von "*`ENABLE_SENSORS = 0`*"! Simulieren Sie dann das Verhalten des Regelkreises bei einer sprunghaften Änderung des Erregerfluss*

$$\psi_{E,\mathrm{ref}}(t) = \psi_{EN}\sigma(t - t_E)!$$

Entspricht die geglättete Erregerstrom-Sprungantwort $\hat{i}_E(t)$ (auf den Erregerstrom-Sollwertsprung $i_{E,\mathrm{ref}}(t) = f(\psi_{EN})\sigma(t - t_E)$) dem erwarteten Verlauf gemäß der Optimierungstabelle (Begründung)?

(i) Senken Sie zum Zeitpunkt $5t_\omega = 2.5\,s$ (gleichzeitig mit der Änderung von $\omega_{M,\mathrm{ref}}(t)$, siehe oben) den Flusssollwert von ψ_{EN} auf $\psi_{E,\min}$ durch die Sollwertvorgabe

$$\psi_{E,\mathrm{ref}}(t) = \psi_{EN}\sigma(t - t_E) + (\psi_{E,\min} - \psi_{EN})\sigma(t - 5t_\omega)$$

für den Erregerfluss. Kann nun die maximale Winkelgeschwindigkeit angefahren werden

ohne dabei die Ankernennspannung u_{AN} dauerhaft zu überschreiten?

Aufgabe 2.3.8 (Feldschwächung und Sollwertgenerierung)**.**

(a) Mit welchem (minimalen) Lastmoment $m_{L,\min}$ kann die GM noch belastet werden, wenn der Fluss auf $\psi_{E,\min}$ gesenkt wurde und der Ankerstrom dauerhaft *nicht i_{AN} übersteigen soll?*

(b) Überlegen Sie sich für Ankerstell- und Feldschwächbereich eine Online-Anpassung des Erregerfluss-Sollwertverlaufes $\psi_{E,\text{ref}}$ in Abhängigkeit der Sollwinkelgeschwindigkeit $\omega_{M,\text{ref}}$! Beachten Sie hierbei dass für $|\omega_{M,\text{ref}}| > \omega_{MN}$ Feldschwächung einsetzen muss!

(c) Warum müssen Sie im Drehzahlregelkreis Block `B1` *(siehe Abb. 2.10) mit der Division durch $\frac{\psi_{E,\text{ref}}}{\psi_{EN}}$ einfügen? Erinnern Sie sich hierzu nochmals an die Auslegung des Geschwindigkeitsregels $F_{R,\omega_M}(s)$! Sehen Sie Schwierigkeiten bei der Implementierung?*

(d) Ergänzen Sie Ihr Modell in `GM_Simulation.mdl` *um noch fehlende Blöcke aus Abb. 2.10! Implementieren Sie auch die Online-Anpassung des Erregerfluss-Sollwertverlaufes aus (c)!*

(e) Abschließend implementieren Sie eine Sättigung der Sollwinkelgeschwindigkeit $\omega_{M,\text{ref}}$, so dass $\omega_{M,\max} \geq |\omega_{M,\text{ref}}|$ nicht überschritten werden kann! (Beachten Sie beide Drehrichtungen!)

(f) Implementieren Sie eine Sollwert-Rampe

$$\omega_{M,\text{ref}}(t) = \frac{3\omega_{MN}}{4} \cdot t \cdot \sigma(t - t_\omega)$$

ab dem Zeitpunkt $t_\omega = 0.5\,s$. Des Weiteren belasten Sie die Maschine zum Zeitpunkt $t_L = 5\,s$ mit dem Lastmoment

$$m_L(t) = m_{L,\min}\sigma(t - t_L)!$$

Simulieren Sie Ihren Aufbau bis zum Simulationsende von $t_{end} = 6\,s$ und betrachten die Signale ω_M, i_A und i_E! Bewerten Sie die Ergebnisse!

(g) Aktivieren *Sie die Sensorik durch Eingabe von "*`ENABLE_SENSORS = 1`*" und wiederholen Sie den vorigen Versuch. Wie beurteilen Sie nun die Ergebnisse, v.a. achten Sie auf den Ankerstrom i_A und den Ausgang der EMK-Aufschaltung $\hat{e}_A/V_{\text{str}}$? Überlegen Sie sich eine Möglichkeit, die zu einem besseren Ergebnis führt (Hinweis: Nutzen Sie keine geglätteten Messwerte)!*

(h) Ändern Sie die Parameter in den Blöcken `B2` *und* `B3` *in einem Bereich von ±50%! Haben Parameterunsicherheiten Einfluss auf die Reglerperformanz (Begründung)?*

Aufgabe 2.3.9 (Positionsregelung)**.**
Im Folgenden sei angenommen, dass zusätzlich noch der Motorwinkel ϕ_M [rad] *als Istposition gemessen wird und als Messgröße vorliegt. Zur Vereinfachung seien Istposition und Istgeschwindigkeit nicht verrauscht. Somit sei keine Istwertglättung nötig.*

(a) Wie muss die Mechanik im Modell (2.1) des Gleichstrommotors erweitert werden, um auch den Motorwinkel zu berücksichtigen?

(b) *Zeichnen Sie den (vereinfachten) Signalflussplan des Positionsregelkreises (Eingänge: $\phi_{M,\mathrm{ref}}$ & m_L; Ausgang: ϕ_M)! Berücksichtigen Sie hierbei die Mechanik, die Ersatzübertragungsfunktion $F^{\mathrm{ers}}_{RK,i_A}(s)$, den Drehzahlregler $F_{R,\omega_M}(s)$ und den Positionsregler $F_{R,\phi_M}(s)$!*

(c) *Bestimmen Sie die Führungs- $F_{\phi_{M,\mathrm{ref}}}(s) = \frac{\phi_M(s)}{\phi_{M,\mathrm{ref}}(s)}$ und Störübertragungsfunktion des Positionsregelkreises $F_{m_L}(s) = \frac{\phi_M(s)}{m_L(s)}$!*
(Hinweis: Berechnen Sie $\phi_M(s) = f(\phi_{M,\mathrm{ref}}(s), m_L(s))$ und lösen dann entsprechend auf!)

(d) *Welcher Regler $F_{R,\phi_M}(s)$ erzielt bereits gutes Störverhalten? Nehmen Sie hierzu an, dass für eine Positionsregelung mit Regler $F_{R,\phi_M}(s)$ das Störverhalten durch*

$$F_{m_L}(s) = \frac{\phi_M(s)}{m_L(s)} = \\ = \frac{s8T_{\mathrm{ers},i_A}(1+sT_{\mathrm{ers},i_A})}{\left(1+s\left(4T_{\mathrm{ers},i_A}+\frac{1}{F_{R,\phi_M}(s)}\right)+s^2\frac{4T_{\mathrm{ers},i_A}}{F_{R,\phi_M}(s)}+s^3\frac{8T^2_{\mathrm{ers},i_A}}{F_{R,\phi_M}(s)}+s^4\frac{8T^3_{\mathrm{ers},i_A}}{F_{R,\phi_M}(s)}\right)\Theta_M F_{R,\phi_M}(s)} \tag{2.10}$$

gegeben ist.

(e) *Erreicht dieser Regler auch gutes Führungsverhalten? Nehmen Sie hierzu an, dass für eine Positionsregelung mit Regler $F_{R,\phi_M}(s)$ das Führungsverhalten durch*

$$F_{\phi_{M,\mathrm{ref}}}(s) = \frac{\phi_M(s)}{\phi_{M,\mathrm{ref}}(s)} = \\ = \frac{1+s4T_{\mathrm{ers},i_A}}{1+s\left(4T_{\mathrm{ers},i_A}+\frac{1}{F_{R,\phi_M}(s)}\right)+s^2\frac{4T_{\mathrm{ers},i_A}}{F_{R,\phi_M}(s)}+s^3\frac{8T^2_{\mathrm{ers},i_A}}{F_{R,\phi_M}(s)}+s^4\frac{8T^3_{\mathrm{ers},i_A}}{F_{R,\phi_M}(s)}} \tag{2.11}$$

gegeben ist.

(f) *Es gelte $F_{R,\phi_M}(s) = V_{R,\phi_M}$. Für welche Werte von V_{R,ϕ_M} ist der geschlossene Regelkreis $F_{\phi_{M,\mathrm{ref}}}(s) = \frac{\phi_M(s)}{\phi_{M,\mathrm{ref}}(s)}$ wie in (2.11) stabil? (Hinweis: Hurwitz-Kriterium in Formelsammlung!)*

(g) *Verifizieren Sie Ihre Untersuchung aus (f) indem Sie die Wurzelortskurve der Regelstrecke*

$$F_{S,\phi_M}(s) = \frac{\phi_M(s)}{\omega_{M,\mathrm{ref}}(s)} = \frac{1+s\,4T_{\mathrm{ers},i_A}}{s(1+s\,4T_{\mathrm{ers},i_A}+s^2\,8T^2_{\mathrm{ers},i_A}+s^3\,8T^3_{\mathrm{ers},i_A})}$$

für die Positionsregelung aufzeichnen! (Hinweis: `rlocus` in Matlab/Simulink!)

(h) *Erweitern Sie Ihre Implementierung in* `GM_Simulation.mdl` *und* `GM_Simulation_Init.m`*, um den entworfenen Positionsregler $F_{R,\phi_M}(s) = V_{R,\phi_M}$!* Deaktivieren *Sie die Sensorik durch Eingabe von "*`ENABLE_SENSORS = 0`*"! Für $t_\phi = 1$ [s] und $V_{R,\phi_M} = 10$ [1/s] simulieren Sie das Verhalten des Regelkreises bei einer sprunghaften Änderung des Sollwinkels*

$$\phi_{M,\mathrm{ref}}(t) = \frac{\pi}{4}\sigma(t-t_\phi) - \frac{\pi}{2}\sigma(t-4\,t_\phi)!$$

Erhöhen Sie V_{R,ϕ_M} in 10er Schritten! Wie ändert sich die Systemantwort des Positionsregelkreises (Anregelzeit, Ausregelzeit, Überschwingen und Stabilität)?

2.4 Implementierung

2.4.1 Laboraufbau: Komponenten, Schnittstelle und Signale

Der Laborauf besteht aus Gleichstrommotor mit starr gekoppeltem Tachogenerator (siehe Abb. 2.12) und (Universal-)Ansteuerelektronik (siehe Abb. 2.15 rechts) jeweils für IGBT-Modul (siehe Abb. 2.13(a)) und Thyristor-/Diodenmodul (siehe Abb. 2.13(b)). Die Leistungsmodule werden über Trenntrafo und/oder Gleichrichter (AC/DC) aus dem Dreiphasensystem mit Energie gespeist (siehe Abb. 2.14 links) und können über das RLC-Lastmodul (siehe Abb. 2.14 rechts) belastet werden. Ströme und Spannung lassen sich mithilfe des Messgerätes (siehe Abb. 2.16(b)) im gesamten Bereich messen. Die in Abb. 2.16(a) dargestellte Buchsenplatte dient als Schnittstelle zur I/O Karte NI PCI-6221 (37pin) im Host/Target Rechner und erlaubt Ein- und Ausgabe über drei differentielle Analogeingänge $AI0$, $AI1$ und $AI2$ (Summenabtastrate 250 [kHz], Auflösung 16 [bit], Messbereiche $\pm 0.2, \pm 1, \pm 5, \pm 10$ [V]), zwei analoge Ausgänge $AO0$ und $AO1$ (Auflösung 16 [bit], Ausgangsbereich ± 10 [V]) und einen digitalen Ausgang $DOP0.0$ (TTL-Pegel). In Tabelle 2.2 sind einige Kerndaten des GM zusammengefasst (Vervollständigung erfolgt bei der Versuchsdurchführung). Es werden **drei Messgrößen als Spannung** erfasst :

- die **Ankerspannung** u_A [V] zwischen `OUT U` & `OUT V` (siehe Abb. 2.13a) über Messverstärker A mit Verhältnis $250 : 2,5$ [1]: Abgriff der zu u_A proportionalen Spannung u_{Y1} an Y1 mit BNC-Kabel (siehe Abb. 2.15) und Anschluss an $AI0$ der Buchsenplatte (siehe Abb. 2.16(a));
- der **Ankerstrom** i_A [A] als Spannung u_{R3} [V] an Widerstand R3 (siehe Abb. 2.13(a)) über Messverstärker D mit Verhältnis $2,5 : 2,5$ [1]: Abgriff der zu i_A proportionalen Spannung u_{Y2} an Y2 mit BNC-Kabel (siehe Abb. 2.15) und Anschluss an $AI1$ der Buchsenplatte (siehe Abb. 2.16(a));
- die **Motordrehzahl** ω_M [rad/s] als Spannung u_{TG} [V] am Tachogenerator (zwischen roter & schwarzer Buchse, siehe Abb. 2.12) mit 1 [V] = 1000 [U/min]: Anschluss an $AI2$ der Buchsenplatte (siehe Abb. 2.16(a)).

Die **Sollankerspannung** $u_{A,\text{ref}}$ wird über die **Ausgabespannung an** $AO0$ der Schnittstelle (zw. roter & schwarzer Buchse, siehe Abb. 2.16(a)) an die Steuerelektronik (Spannung zw. A & B, siehe Abb. 2.15) übergeben (Poti auf Anschlag rechts). Hierbei gilt folgender Zusammenhang zwischen Spannungsvorgabe und Pulsbreite:

$$\left.\begin{array}{rrrrll} 10\ [\text{V}] & \rightarrow & T_P = 100\%\,T & \wedge & u_A = u_{\text{DC}} & \text{, d.h. Ventilpaar } \texttt{V2} \wedge \texttt{V3} \text{ aktiv} \\ 5\ [\text{V}] & \rightarrow & T_P = 0\%\,T & \wedge & u_A = 0 & \\ \text{und}\quad 0\ [\text{V}] & \rightarrow & T_P = 100\%\,T & \wedge & u_A = -u_{\text{DC}} & \text{, d.h. Ventilpaar } \texttt{V1} \wedge \texttt{V4} \text{ aktiv.} \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

Die Schnittstellenausgänge $AO1$ und $DOP0.0$ werden nicht benötigt.

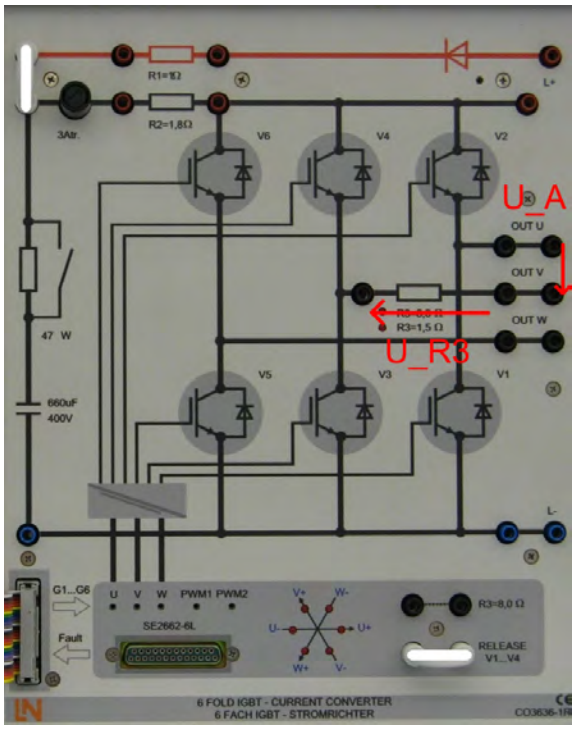
2.4.2 Laboraufbau: Bedienung und Implementierung

Legen Sie den Kippschalter `RUN/STOP` auf `STOP` (siehe Abb. 2.15) und den Motorabschalter auf `0` (siehe Abb. 2.14). Drehen Sie den Poti auf Anschlag *rechts* (siehe Abb. 2.15). Verdrahten Sie die Module mit Jumpern bzw. Steckerverbindungen (weiss) entsprechend den Abb. 2.13, 2.14 und 2.15. Verbinden Sie auch die obere (Universal-)Steuerelektronik mit dem Netzteil (siehe Abb. 2.15). Treffen Sie entsprechend Abb. 2.15 die vorgegebene Auswahl (gelb) mithilfe der Kippschalter und des Drehschalters der Universalsteuerelektronik. Verbinden Sie

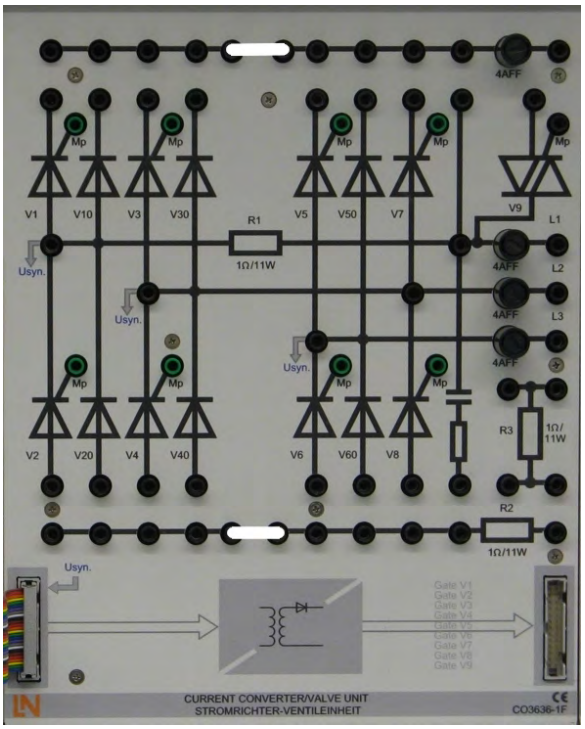
Beschreibung	**Symbol & Wert**
Nennleistung	$P_N = 0.2$ [kW]
Nenndrehzahl	$n_{MN} = 2000 \left[\frac{1}{\text{min}}\right] \Rightarrow \omega_{MN} =$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
Nennankerspannung	$u_{AN} = 230$ [V]
Nennankerstrom	$i_{AN} = 1$ [A]
Nennerregerspannung	$u_{EN} = 230$ [V]
Nennerregerstrom	$i_{EN} = 0.1$ [A]
max. Ankerstrom	$i_{A,max} = 3$ [A]
max. Erregerstrom	$i_{E,max} = 0.3$ [A]
Ankerinduktivität	$L_A =$ $\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$
Ankerwiderstand	$R_A =$ $[\Omega]$
Erregerwiderstand	$R_E =$ $[\Omega]$
Rotorträgheitsmoment	$\Theta_M =$ $\left[\text{kg m}^2\right]$
Verstärkung GM	$V_{GM} = \frac{1}{C_M \Psi_{EN}} =$ $\left[\frac{1}{\text{Vs}}\right]$
Periodendauer des Gleichrichters	$T = \frac{1}{1800}$ [s]
Zwischenkreisspannung	$u_{\text{DC}} = 230$ [V]
Verstärkung des Gleichrichters	$V_{\text{str}} =$ [1]
Zeitkonstante des Gleichrichters	$T_{\text{str}} =$ [s]
Widerstände auf RLC-Lastmodul	$R_i = 270$ [Ω], $i \in \{1, 2, 3\}$
Widerstand auf IGBT-Modul	$R3 = 1.5$ [Ω]

Tabelle 2.2: *Kenndaten des Versuchsaufbaus (unvollständig!)*

Abbildung 2.12: *Tachogenerator (mit Ausgangsspannung u_{TG} [V]) und Gleichstrommaschine (mit Anschlüssen A1 & A2 für Ankerkreis und E1 & E2 für Erregerkreis).*



(a) *IGBT-Modul*



(b) *Thyristor-/Diodenmodul*

Abbildung 2.13: *Leistungselektronikmodule.*

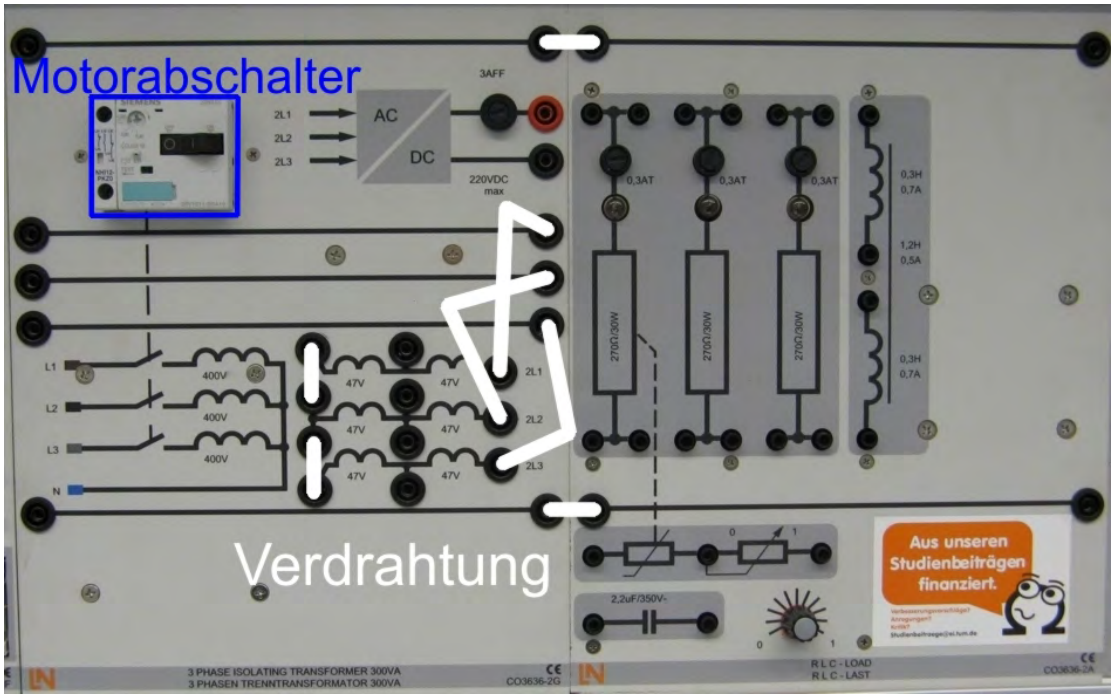


Abbildung 2.14: *Transformator (für Phasen L1, L2 und L3) und RLC-Lastmodul.*

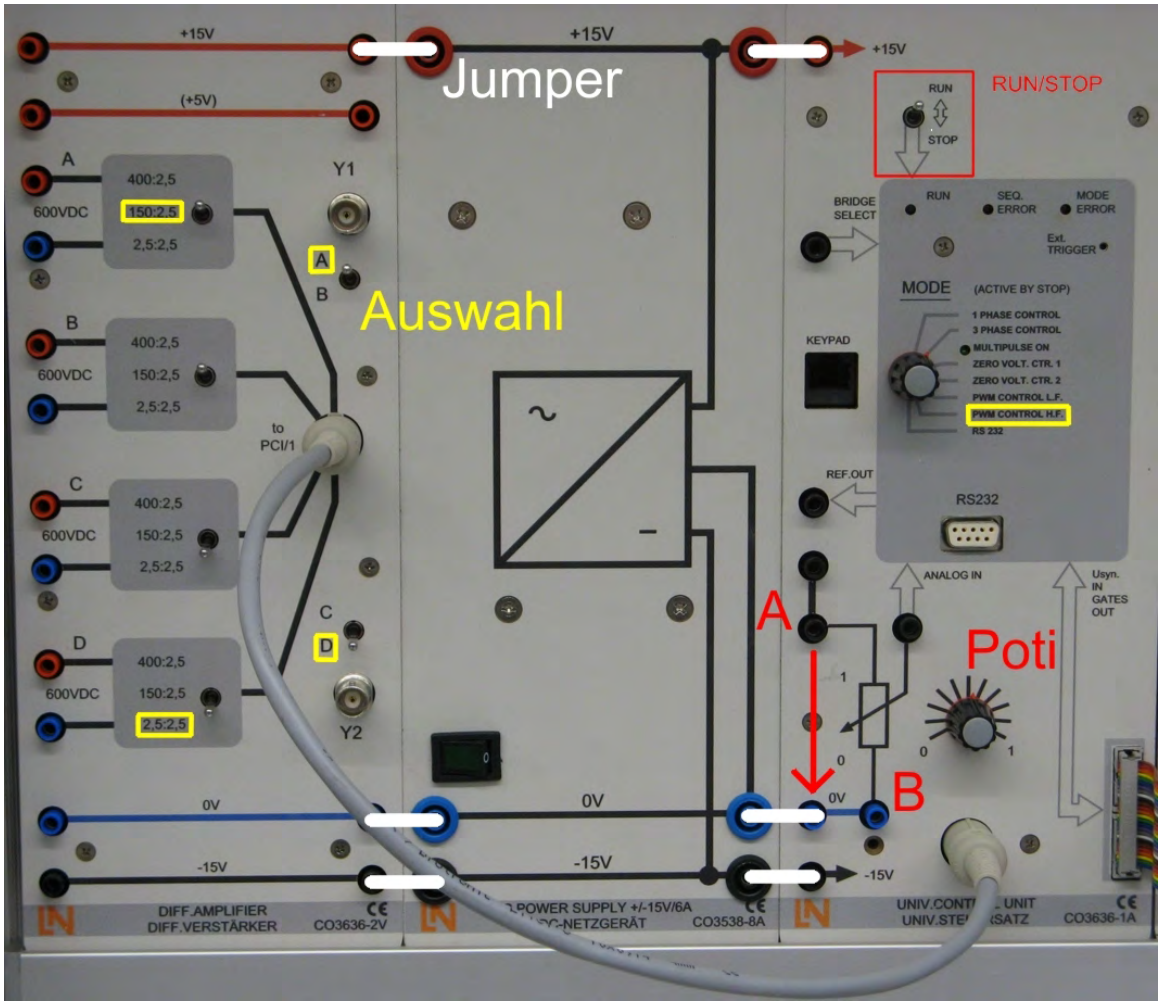
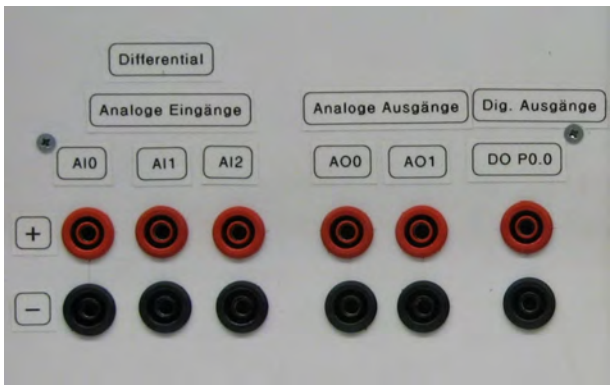


Abbildung 2.15: *Messverstärker, Netzteil und Universalsteuerelektronik für Stromrichter-Module.*



(a) *Schnittstelle für I/O-Karte NI PCI-6221 (37pin) zur Anbindung an Realtime-Windows-Target.*

(b) *Spannungs- und Strommessgerät.*

Abbildung 2.16: *Schnittstellen und Messgerät.*

die einzelnen Module mit der Schnittstelle ($AI0$, $AI1$, $AI2$ und $AO0$, siehe Abb. 2.16a) entsprechend der Beschreibung auf Seite 20.

In Matlab/Simulink stehen Ihnen die vorgefertigte Dateien '`GM_Implementierung_Init.m`' (Matlab-Skript) und '`GM_Implementierung.mdl`' (Simulink-Modell) zur Verfügung. Während der Versuchsdurchführung ergänzen Sie beide Dateien entsprechend der Aufgabenstellungen. Zur Initialisierung Ihres Simulink-Modells '`GM_Implementierung.mdl`' drücken Sie `F5` im Matlab-Editor bei geöffnetem Skript '`GM_Implementierung_Init.m`'. Zur Erzeugung (buildprocess) eines realzeitfähigen Programms zur Regelung der GM auf dem Target/Host PC mithilfe von Realtime-Windows-Target drücken Sie `STRG`+`B` im geöffnetem Simulink-Modell '`GM_Implementierung.mdl`'.

2.4.3 Vorgehensweise und Arbeitsschritte

Achtung: Gehen Sie bei Ihrer Versuchsdurchführung sorgfältig vor und überprüfen Sie Ihre Steckverbindungen. **Bevor** Sie Motor und Gleichrichter mit Energie speisen (d.h. Motorabschalter auf `I`, siehe Abb. 2.14 links) und die Pulsweitenmodulation (PWM) frei schalten (d.h. Kippschalter `RUN`/`STOP` auf `RUN`, siehe Abb. 2.15), **prüfen** Sie Ihre Verdrahtung sorgfältig (Mehraugenprinzip)!
Bei Problemen während einer Messung bzw. nach *jeder* Messung schalten Sie den Kippschalter `RUN`/`STOP` auf `STOP` ("Notaus") zurück! Bevor Sie Verdrahtungen bzw. Steckverbindungen ändern, stellen Sie sicher, dass der Kippschalter auf `STOP` und der Motorabschalter auf `0` geschaltet sind!

Aufgabe 2.4.1 (Signalanpassung)**.** *Es sollen die Messspannungen in Signale mit in SI-Einheiten (z.B. i_A^m in* [A]*) gewandelt werden und die Sollankerspannung $u_{A,\text{ref}}$* [V] *in eine Schnittstellenausgangsspannung proportional zur Pulsbreite umgesetzt werden. Hierzu ist eine entsprechende Signalanpassung (SA) notwendig.*

(a) Bestimmen Sie die Signalanpassung $f_{u_A}^{SA}(\cdot)$ von [V] *nach* [V]*, so dass $u_A^m = f_{u_A}^{SA}(u_{Y1})$* [V]*! Berücksichtigen Sie das Verhältnis des Messverstärkers A.*

(b) Bestimmen Sie die Signalanpassung $f_{i_A}^{SA}(\cdot)$ von [V] *nach* [A]*, so dass $i_A^m = f_{i_A}^{SA}(u_{Y2})$* [A]*! Berücksichtigen Sie das Verhältnis des Messverstärkers D und den Abgriff über Widerstand $R3 = 1.5\,[\Omega]$.*

(c) Bestimmen Sie die Signalanpassung $f_{\omega_M}^{SA}(\cdot)$ von [V] *nach* [rad/s]*, so dass $\omega_M^m = f_{\omega_M}^{SA}(u_{TG})$* [rad/s]*!*
Berücksichtigen Sie den Proportionalitätsfaktor des Tachogenerators und die Wandlung nach [rad/s]*.*

(d) Implementieren Sie Ihre Signalanpassungen mithilfe Matlab/Simulink im Subsystem '`Signalwandlung für Messgrößen`' *des* '`GM_Implementierung.mdl`' *(Simulinkmodell)!*

(e) Bestimmen Sie die Signalanpassung $f_{T_P}^{SA}(\cdot)$ für die Pulsbreite T_P (siehe (2.12)), so dass $T_P = f_{T_P}^{SA}(U_A^\star)$ [V]*! Berücksichtigen Sie den Ausgangsspannungsbereich* [0, 10 [V]] *und die als konstant angenommen Zwischenkreisspannung $u_{DC} = 230$* [V]*.*

(f) Implementieren Sie Ihre Signalanpassung mithilfe Matlab/Simulink im Subsystem `'Signalwandlung für Eingangsgrößen'` *des* `'GM_Implementierung.mdl'`*! Begrenzen Sie den Eingang* $u_{A,\mathrm{ref}}$ *auf den Bereich* $[-230, 230]$ [V].

2.4.3.1 Ankerstromregelung

Hinweis: Sie können durch Aufruf (`F5` im Editor drücken) des Matlab-Skriptes '`GM_Implementierung_Figureplotter.m`' eine Figure erzeugen, die – jeweils über der Zeit t [s] – die Größen $\omega_M^m, \hat{\omega}_M, \omega_{M,\text{ref}}$ [rad/s], $i_A^m, \hat{i}_A, i_{A,\text{ref}}$ [A] und $u_A^m, \bar{u}_A, u_{A,\text{ref}}$ [V] darstellt. Speichern Sie die erzeugten Figuren jeweils in einem geeigneten Verzeichnis ab.

Aufgabe 2.4.2 (Nenngrößen).

(a) Berechnen Sie die Nennwinkelgeschwindigkeit ω_{MN} [rad/s] und das Nennmoment m_{MN} [Nm] des Gleichstrommotors!

(b) Berechnen Sie (symbolisch) die stationäre Verstärkung $V_{GM} = \frac{1}{C_M \psi_{EN}} \left[\frac{\text{rad}}{\text{Vs}}\right]$ des Gleichstrommotors im Nennpunkt!

(c) Berechnen Sie (symbolisch) die Leerlaufwinkelgeschwindigkeit ω_{0MN} [Nm] des Gleichstrommotors?

(d) Welche Erregerspannung u_E [V] muss am Erregerkreis anliegen, so dass sich Nennfluss ψ_{EN} einstellt?

(e) Welche Ankerspannung u_A [V] muss am Ankerkreis anliegen, so dass sich die Leerlaufdrehzahl ω_{0MN} einstellt?

Aufgabe 2.4.3 (Bestimmen (Schätzen) der Ankerkreisparameter).

(a) Messen Sie mithilfe des Multimeters den Ankerkreiswiderstand R_A [Ω] und tragen Sie den Wert in '`GM_Implementierung_Init.m`' ein!

(b) Bestimmen Sie Verstärkung V_{str} und Zeitkonstante T_{str} des selbstgeführten IGBT-Stromrichters! Müssen Sie Ihre Signalwandlung aus Aufgabe 2.4.1e berücksichtigen?

(c) Überlegen Sie sich eine Möglichkeit zur Schätzung der Ankerzeitkonstante $T_A = L_A/R_A$ [s]!

(d) Bestimmen Sie die Ankerzeitkonstante $T'_A = L_A/R'_A$ [s] (wobei $R'_A = R2 + R3 + R_A + \sum_i R_i$, siehe Tab. 2.2). Begrenzen Sie bei Ihrer Messung durch entsprechende Serienschaltung von Widerständen (mithilfe des RLC-Lastmoduls in Abb. 2.14 rechts) den maximalen Ankerstrom auf 0.3 [A] und überwachen Sie den Stromverlauf i_A mithilfe des Messgerätes (siehe Abb. 2.16b)! Regen Sie den Ankerkreis mit folgendem Sollankerspannungsverlauf an

$$\forall\, t \in [0,\, 10]\,[\text{s}]: \; u_{A,\text{ref}}(t) = u_{DC}\big(\sigma(t-1) - \sigma(t-2)\big) - u_{DC}\big(\sigma(t-3) - \sigma(t-4)\big) - u_{DC}\big(\sigma(t-5) - \sigma(t-6)\big) + u_{DC}\big(\sigma(t-7) - \sigma(t-8)\big)\;[\text{V}] \quad (2.13)$$

wobei für $t_0 \geq 0$

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0 & , \; t < t_0\,[\text{s}] \\ 1 & , \; t \geq t_0\,[\text{s}] \end{cases}$$

die um t_0 nach rechts verschobene Sprungfunktion darstellt. Verwenden Sie hierzu z.B. den Simulink-Block '`Repeating Sequence Stair`' (siehe Simulink-Bibliothek:Sources) und verbinden Sie das Signal $U_A^\star$ mit dem Subsystem '`Signalrouting für Scope`'.

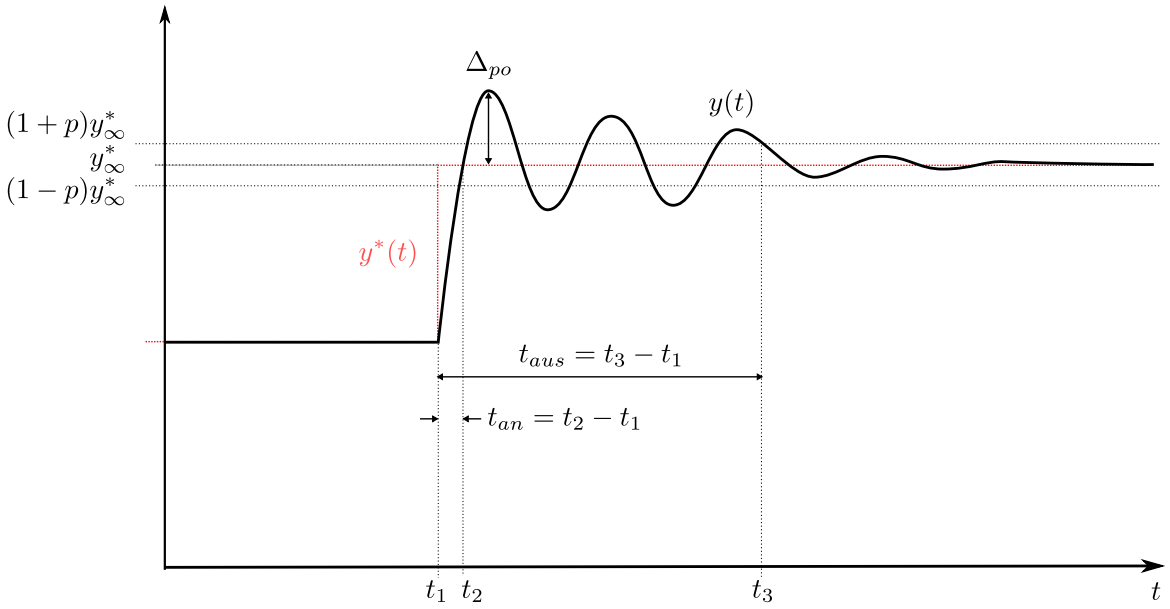


Abbildung 2.17: *Bestimmung der Regelgüte eines Regelkreises anhand seiner Sprungantwort $y(\cdot)$ auf einen Sollsprung $y^\star(\cdot) = y^\star_\infty \sigma(\cdot)$:*
a) Anregelzeit t_{an}, d.h. hier schneidet die Regelgröße $y(t_2)$ erstmals den Sollwert $y^\star_\infty$
b) Ausregelzeit t_{aus}, d.h. $y(t)$ verbleibt für alle $t \geq t_3$ innerhalb des Toleranzbandes $(1 \pm 0.02)n^\star_\infty$
c) Überschwingweite (peak overshoot) $\Delta_{po} = |(y_{max} - y^\star_\infty)/y^\star_\infty|$.

(e) Berechnen Sie die Ankerinduktivität L_A [Vs/A] aus T'_A [s] und die reale Ankerzeitkonstante $T_A = \frac{L_A}{R2+R3+R_A}$ [s]. Tragen Sie deren Werte in 'GM_Implementierung_Init.m' ein!

Aufgabe 2.4.4 (Ankerstromregelung ohne Erregung, d.h. $\psi_E = 0$ [Vs])**.** *Schließen Sie nun den Ankerkreis (A1 & A2) direkt an den IGBT-Stromrichter (OUT U & OUT V), wobei Sie mithilfe des Messgerätes (siehe Abb. 2.16b) aber weiterhin den Ankerstrom i_A direkt messen (überwachen).*

(a) Implementieren Sie eine Stromistwertglättung in Matlab/Simulink mithilfe von

$$F_{g,i_A}(s) = \frac{\hat{i}_A(s)}{i^m_A(s)} = \frac{1}{1 + s\,T_{g,i_A}}. \tag{2.14}$$

Wählen Sie $T_{g,i_A} = 5 \cdot 10^{-3}$ [s] in 'GM_Implementierung_Init.m'.

(b) Stellen Sie die relevante Streckenübertragungsfunktion

$$F_{\hat{i}_A}(s) = \frac{\hat{i}_A(s)}{u_{A,\mathrm{ref}}(s)} = \frac{V_{S,i_A}}{(1 + s\,T_{\sigma,i_A})(1 + s\,T_{1,i_A})} \tag{2.15}$$

des Ankerstromkreises unter Vernachlässigung der Spannungsbegrenzung auf. Bestimmen Sie die kleine Summationszeitkonstante T_{σ,i_A} [s] und die große Zeitkonstante T_{1,i_A} [s] der Strecke $F_{\hat{i}_A}(s)$ und deren Verstärkung V_{S,i_A} [A/V]! Beachten Sie die Messwertglättung in der Strecke und addieren Sie die beiden kleinen Zeitkonstanten.

(c) Entwerfen Sie mithilfe der Optimierungstabelle (siehe Abb. D.2) einen Stromregler

$$F_{R,i_A}(s) = \frac{u_{A,\mathrm{ref}}(s)}{i_{A,\mathrm{ref}}(s) - \hat{i}_A(s)} \tag{2.16}$$

für gutes Führungsverhalten! Welches Optimierungskriterium wenden Sie an?

(d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$F_{w,\hat{i}_A}(s) = \frac{\hat{i}_A(s)}{i_{A,\mathrm{ref}}(s)} = \frac{F_{R,i_A}(s)\, F_{\hat{i}_A}(s)}{1 + F_{R,i_A}(s)\, F_{\hat{i}_A}(s)} \tag{2.17}$$

des geschlossenen Stromregelkreises! Bei Ihrer Berechnung ersetzen Sie die Reglerparameter durch die Streckenparameter.

(e) Erweitern Sie Modell '`GM_Implementierung.mdl`*' und Init-Skript '*`GM_Implementierung_Init.m`*' um den entworfenen Stromregler bzw. dessen Reglerparameter und verbinden Sie die Signale $i_{A,\mathrm{ref}}$ und $\hat{i}_A$ mit dem Subsystem '*`Signalrouting für Scope`*'!*

(f) Verifizieren Sie das Verhalten Ihres Stromregelkreises für einen rechteckigen Verlauf des Stromsollwertes

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [0,\, 10]\,[\mathrm{s}]: \qquad i_{A,\mathrm{ref}}(t) = {} & 0.2\,\big(\sigma(t-1) - \sigma(t-2)\big) - 0.2\,\big(\sigma(t-3) - \sigma(t-4)\big) \\ & + 0.3\,\big(\sigma(t-5) - \sigma(t-6)\big) - 0.3\,\big(\sigma(t-7) - \sigma(t-8)\big)\ [\mathrm{A}]\,.\end{aligned}$$

Implementieren Sie den Stromsollwertverlauf wieder mithilfe des '`Repeating Sequence Stair`*' Simulink-Blocks.*

(g) Entsprechend Abb. 2.17 bestimmen Sie Anregelzeit, Ausregelzeit (bei einem Toleranzband von ±2%) und maximales Überschwingen! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Vorgaben der Optimierungstabelle. Gibt es Abweichungen zur Optimierungstabelle? Wenn ja, warum?

Aufgabe 2.4.5 (Ankerstromregelung mit Erregung, d.h. $\psi_E = \psi_{EN}$ [Vs])**.**

(a) Wie können Sie die nötige (konstante) Erregernennspannung $u_{EN} = 230$ [V] erzeugen, um die Gleichstrommaschine mit Nennfluss $\psi_E = \psi_{EN}$ [Vs] zu erregen? Skizzieren Sie hierzu einen Sechspuls-Gleichrichter (B6U) aus Leistungsdioden. Überlegen Sie sich die nötige Verdrahtung anhand des Diodenmoduls in Abb. 2.13(b).

(b) Verdrahten Sie das Diodenmodul, so dass ein Sechspuls-Gleichrichter realisiert wird! Verbinden Sie den Dioden-Gleichrichter mit den drei Versorgungsspannungen aus 2L1, 2L2 und 2L3 und messen Sie die Ausgangsspannung mithilfe des Messgerätes (siehe Abb. 2.16(b))! Verbinden Sie Erregerkreis (E1 & E2, siehe Abb. 2.12) mit dem Ausgang Ihres Diodengleichrichters!

(c) Wiederholen Sie Teilaufgabe 2.4.4(f). Warum ergibt sich ein stationärer Regelfehler?

(d) Berechnen Sie aus Gl. (2.1) die Übertragungsfunktion

$$F_{GM}(s) = \frac{\omega_M(s)}{u_A(s)} \tag{2.18}$$

der Gleichstrommaschine (Annahme: $\psi_E = \psi_{EN}$)!

(e) *Wie lässt sich die stationäre Verstärkung* $V_{GM} = \frac{1}{C_M \psi_{EN}} \left[\frac{\text{rad}}{\text{Vs}}\right]$ *der Übertragungsfunktion* $F_{GM}(s)$ *der GM aus den Nenngrößen bestimmen? Überlegen Sie sich eine Möglichkeit zur Verifikation der Verstärkung* V_{GM} *anhand von Messergebnissen!*

(f) *Implementieren Sie eine Drehzahlistwertglättung in Matlab/Simulink mithilfe von*

$$F_{g,\omega_M}(s) = \frac{\hat{\omega}_M(s)}{\omega_M^m(s)} = \frac{1}{1 + s\,T_{g,\omega_M}}. \tag{2.19}$$

Wählen Sie $T_{g,\omega_M} = 10 \cdot 10^{-3}\,[\text{s}]$ *in '*`GM_Implementierung_Init.m`*' und verbinden Sie das Signal* $\hat{\omega}_M$ *mit dem Subsystem '*`Signalrouting für Scope`*'!*

(g) *Führen Sie die entsprechende Messung zur Validierung von* V_{GM} *durc Regen Sie die Gleichstrommaschine hierzu mit dem in Gl. (2.13) angegebenen Sollspannungsverlauf* $u_{A,\text{ref}}$ *an!*

(h) *Überlegen Sie sich eine Möglichkeit zur Elimination des Einflusses der induzierten Gegenspannung* e_A *(Hinweis: Störgrößenaufschaltung)! Nehmen Sie an, dass Ihnen die geglättete Drehzahl* $\hat{\omega}_M(t)$ *als Signal zur Verfügung steht.*

(i) *Implementieren Sie Ihre Idee zur EMK-Kompensation in '*`GM_Implementierung.mdl`*'! Wiederholen Sie Teilaufgabe 2.4.4(f). Ergibt sich weiterhin ein stationärer Regelfehler?*

(j) *Gibt es Wind-Up Probleme? Falls ja, implementieren Sie eine einfache Anti-Wind-Up Strategie!*

Aufgabe 2.4.6 (Drehzahlregelung)**.**

(a) *Überlegen Sie sich eine Möglichkeit zur Schätzung des Trägheitmomentes* $\Theta_M \left[\text{kg}\,\text{m}^2\right]$ *der Gleichstrommaschine! Verwenden Sie bisherige Erkenntnisse und den Stromregelkreis mit EMK-Kompensation.*

(b) *Führen Sie entsprechende Messungen zur Schätzung des Trägheitmomentes* $\Theta_M \left[\text{kg}\,\text{m}^2\right]$ *durch und tragen Sie dessen Wert in '*`GM_Implementierung_Init.m`*' ein!*

(c) *Ersetzen Sie zunächst den Stromregelkreis*

$$F_{w,i_A}(s) = \frac{i_A(s)}{i_{A,\text{ref}}(s)} \approx \frac{1}{1 + sT_{ers,i_A}} \tag{2.20}$$

durch eine Ersatz-Übertragungsfunktion mit PT_1*-Verhalten und der Zeitkonstanten* T_{ers,i_A} *(Annahme: ideale EMK-Kompensation). Verwenden Sie die Übertragungsfunktion (2.15) aus Aufgabe 2.4.3.1 und beachten Sie hierbei den Zusammenhang zwischen* $i_A(s)$ *(bzw.* $i_A^m(s)$*) und* $\hat{i}_A(s)$ *aufgrund der Stromglättung (2.14)! Wie groß ist* T_{ers,i_A} *(Polynomdivision notwendig)?*

(d) *Stellen Sie mithilfe der Ersatzübertragungsfunktion (2.20) die (genäherte) Streckenübertragungsfunktion*

$$F_{\hat{\omega}_M}(s) = \frac{\hat{\omega}_M(s)}{i_{A,\text{ref}}(s)} = \frac{V_{S,\omega_M}}{s\,T_{1,\omega_M}(1 + s\,T_{\sigma,\omega_M})} \tag{2.21}$$

für den Drehzahlreglerentwurf auf! Bestimmen Sie die kleine Summationszeitkonstante T_{σ,ω_M} *und die Verstärkung* V_{S,ω_M} *der Strecke* $F_{\hat{\omega}_M}(s)$ *für Nennfluss* $\psi_E = \psi_{EN}$ *und große Zeitkonstante* $T_{1,\omega_M} = 1$ [s]*. Warum ist diese Wahl für* T_{1,ω_M} *zulässig?*

(e) Welchen Reglertyp schlagen Sie vor und nach welchem Optimierungskriterium legen Sie den Drehzahlregler aus (siehe Optimierungstabelle in Abb. D.2)!

(f) Erweitern Sie Ihre Regelkreisstruktur in '`GM_Implementierung.mdl`*' und das Init-Skript '*`GM_Implementierung_Init.m`*' um den entworfenen Drehzahlregler! Begrenzen Sie den Drehzahlreglerausgang $i_{A,\mathrm{ref}}$ auf den Bereich $[-i_{A,max,\mathrm{ref}},\, i_{A,max,\mathrm{ref}}]$ mit $i^{\star}_{A,max} = 5$ [A]!*

(g) Bestimmen Sie wieder Anregelzeit, Ausregelzeit und maximales Überschwingen für alle Sprünge des folgenden Solldrehzahlverlaufes

$$\forall\, t \in [0,\, 10]\,[\mathrm{s}]: \qquad \omega_{M,\mathrm{ref}}(t) = 50\left(\sigma(t-1) - \sigma(t-2)\right) - 50\left(\sigma(t-3) - \sigma(t-4)\right) + 100\left(\sigma(t-5) - \sigma(t-6)\right) - 100\left(\sigma(t-7) - \sigma(t-8)\right)\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right].$$

Verbinden Sie das Signal $\omega_{M,\mathrm{ref}}$ mit dem Subsystem '`Signalrouting für Scope`*'! Gibt es Abweichungen zu den Vorgaben in der Optimierungstabelle? Wenn ja, warum?*

(h) Ihnen ist die erzielte Überschwingweite zu hoch. Implementieren Sie eine entsprechende Maßnahme, die das Überschwingen reduziert. Betrachten Sie die Signalverläufe! Was fällt Ihnen beim Ankerstrom i_A auf?

(i) Nehmen Sie an, dass der Sollankerstrom den (neuen) Maximalwert $i_{A,\,max,\mathrm{ref}} = 0.5\,A$ nicht überschreiten soll und begrenzen Sie das Signal des Stromsollwerts $i_{A,\mathrm{ref}}$ entsprechend! Wiederholen Sie die Messung aus Aufgabe 2.4.6(g) (ohne Sollwertglättung!) und vergleichen Sie die Signalverläufe mit der Messung von Aufgabe 2.4.6(g). Welche Unterschiede sind erkennbar (Begründung)? Müssen zum Erreichen einer befriedigenden Regelgüte evtl. noch weitere Maßnahmen getroffen werden (Hinweis: Wind-Up Problematik)?

Kapitel 3

Projekt 2: Permanentmagnet-Synchronmaschine

3.1 Problemstellung

In diesem Projekt sollen die erlernten Modellierungs- und Regelungstechniken der Gleichstrommaschine auf Modellierung und Regelung einer Permanentmagnet-Synchronmaschine (PMSM) übertragen werden. Für eine Permanentmagnet-Synchronmaschine sollen

- Puls-Weiten-Modulationsverfahren,
- Verfahren zur Rotorflussorientierung,
- Statorstromregelung und
- Drehzahlregelung

entworfen, simuliert und implementiert werden. Als Regelkreisstruktur wird wieder die (in der Industrie übliche) Kaskadenregelung verwendet. Die kaskadierten Regelkreisstrukturen werden mithilfe von Matlab/Simulink entworfen, auf einem dSPACE Realzeitsystem (DS1104) implementiert und an einer Permanentmagnet-Synchronmaschine getestet und ausgewertet.

Lernziele und -inhalte:

- Verstehen der Funktionsweise einer Permanentmagnet-Synchronmaschine und eines 2-Level Umrichters (Spannungszwischenkreisumrichter),
- Verdrahten des Laboraufbaus (u.a. Antrieb, Schnittstelle, Realzeitsystem),
- Finden, Lesen und Verwenden von Hardware-Dokumentationen,
- Programmieren von Puls-Weiten-Modulationsverfahren,
- Bestimmen der Streckenparameter von Permanentmagnet-Synchronmaschine und Umrichter,
- Entwerfen, Implementieren und Bewerten der Strom- und Drehzahlregelung und
- Rapid-Prototyping mithilfe von Matlab/Simulink von kaskadierten Regelkreisstrukturen auf einem dSPACE-Realzeitsystem und Programmierung einer Bedienung-GUI mithilfe ControlDesk

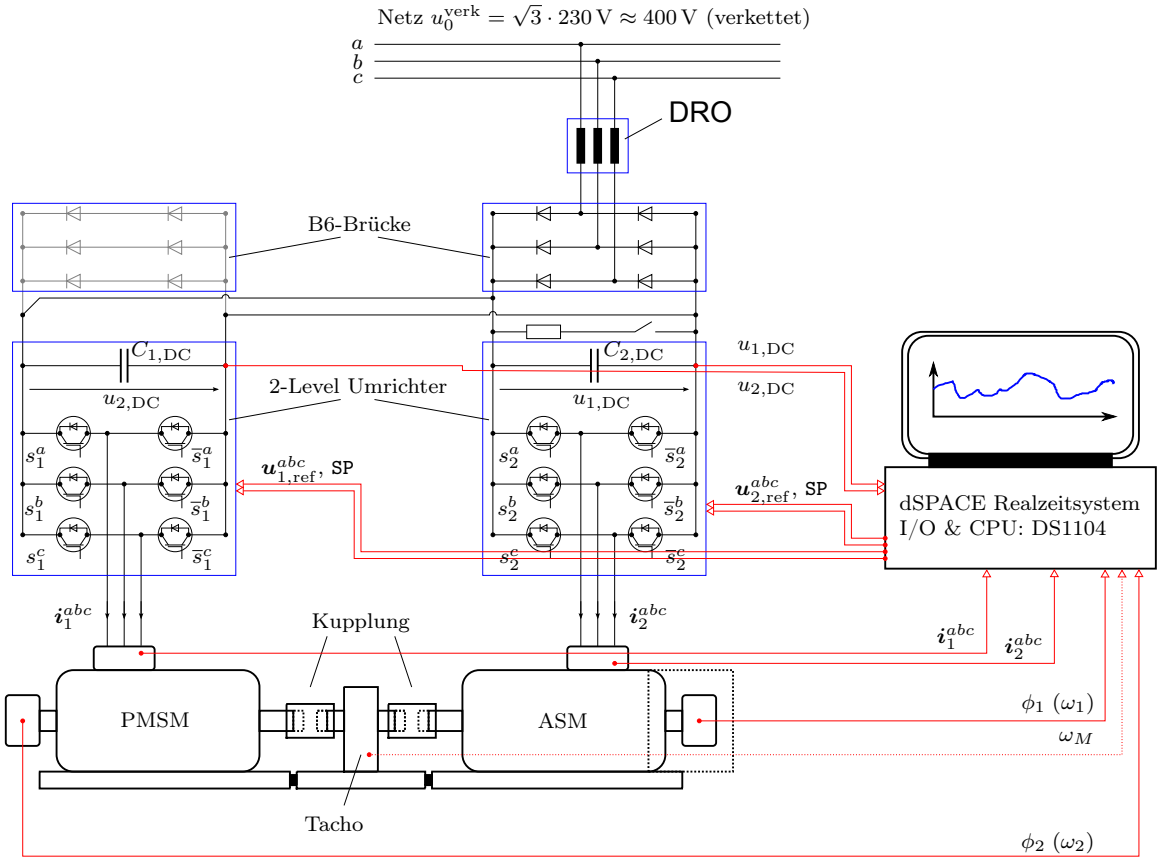


Abbildung 3.1: *Übersichtsbild des Laboraufbaus für PMSM & ASM (Projekte 2 & 3).*

3.2 Laboroaufbau

Ein Übersichtsbild des Laboraufbaus ist in Abb. 3.1 dargestellt. Der Laboraufbau besteht aus zwei Zwischenkreisumrichtern, die über eine Parallelschaltung der Zwischenkreise (mit Kapazitäten $C_{1,\text{DC}}$ und $C_{2,\text{DC}}$) verbunden sind. Der rechte Zwischenkreisumrichter ist über einen Dioden-Gleichrichter (B6-Brücke) mit dem Netz verbunden und besitzt einen Chopper-Widerstand (um eine unzulässige Erhöhung der Zwischenkreisspannung zu verhindern). Eine Permanentmagnet-Synchronmaschine (PMSM) und eine Asynchronmaschine (ASM) können über Kupplungen direkt oder über ein Steckmodul mit Tachogenerator miteinander verbunden werden.
Der Host-PC mit integriertem dSPACE Realzeitsystem (dSPACE DS1104 Karte) erlaubt Rapid-Prototyping. Es können folgende Messsignale dem Realzeitsystem zugeführt werden:

- die Statorströme $\boldsymbol{i}_1^{abc}$ und $\boldsymbol{i}_2^{abc}$ der beiden elektrischen Maschinen,
- die Positionswinkel ω_1 und ω_2 beider Maschinen (via Inkrementalencoder),
- die Winkelgeschwindigkeit ω_M (via Tachogenerator) und
- die Zwischenkreisspannungen $u_{1,\text{DC}}$ und $u_{2,\text{DC}}$ der beiden Umrichter.

Das Realzeitsystem gibt die Referenzspannungen $\boldsymbol{u}_{1,\text{ref}}^{abc}$ bzw. $\boldsymbol{u}_{2,\text{ref}}^{abc}$ und die Freigabesignale $\texttt{SP}_1$ bzw. $\texttt{SP}_2$ an die Umrichter. Die Referenzspannungen werden jeweils über die im Realzeitsystem implementierten Puls-Weiten-Modulationsverfahren basierend auf den Schaltvektoren

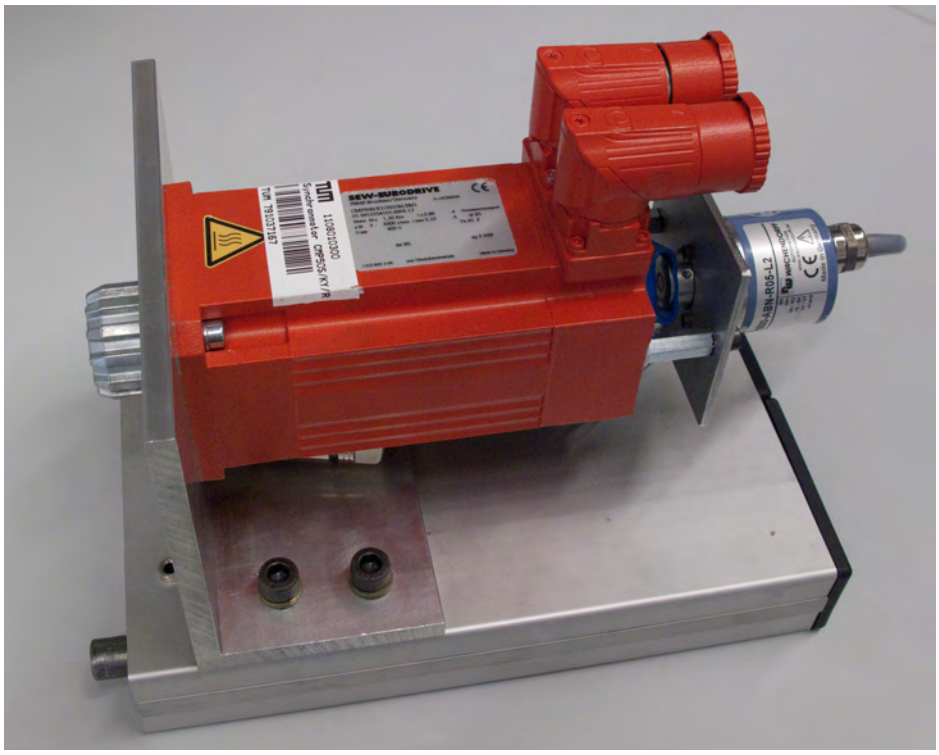


Abbildung 3.2: *Synchronmaschine.*

$\boldsymbol{s}_1^{abc} = (s_1^a, s_1^b, s_1^c)^\top$ und $\boldsymbol{s}_2^{abc} = (s_2^a, s_2^b, s_2^c)^\top$ in den Umrichtern nachgebildet. Hierbei werden aus Sicherheitsgründen nur die Schaltsignale für die oberen IGBTs (jeweils links in Abb. 3.1) vorgegeben, die unteren IGBTs (jeweils rechts in Abb. 3.1) erhalten hardware-technisch die negierten Schaltzustände $\overline{\boldsymbol{s}}_1^{abc} = (\overline{s}_1^a, \overline{s}_1^b, \overline{s}_1^c)^\top$ und $\overline{\boldsymbol{s}}_2^{abc} = (\overline{s}_2^a, \overline{s}_2^b, \overline{s}_2^c)^\top$. Realzeitsystem und Host-PC (beides in einem Rechner) ermöglichen die Überwachung des Systemzustandes mithilfe der dSPACE ControlDesk Umgebung (siehe dSPACE Dokumentation).
In Abb. 3.2 ist die zur Verfügung stehende Permanentmagnet-Synchronmaschine `CMP50S/KY/-RH1M/SM1` der Firma SEW-Eurodrive dargestellt. Das dazugehörige Typenschild zeigt Abb. 3.3. Zur Winkelmessung steht ein Inkrementalencoder der Firma Wachendorff (siehe Abb. 3.4) zur Verfügung. Die Permanentmagnet-Synchronmaschine oder die Asynchronmaschine können jeweils über einen der Umrichter `MDX61B001 5-543-4-00` der Firma SEW-Eurodrive gesteuert werden. Über die Umrichterschnittstellen (siehe Konnektorplatten in Abb. 3.5 und 3.6) können jeweils folgende Signale vorgegeben bzw. ausgelesen werden:

- der Schaltvektor $\boldsymbol{s}_i^{abc} = (s_i^a, s_i^b, s_i^c)^\top$, $i \in \{1, 2\}$ über die Anschlüsse `Ea` $= s_i^a$, `Eb` $= s_i^b$ und `Ec` $= s_i^c$
- das Freigabe-Signal `SP`$_i$, $i \in \{1, 2\}$ über den Anschluss `SP`
- die Stromistwerte $\boldsymbol{i}_i^{abc}$, $i \in \{1, 2\}$ über die Anschlüsse `Ia` $= i_i^a$, `Ib` $= i_i^b$ und `Ic` $= i_i^c$ (Strommessung)
- der Zwischenkreisspannungsistwert $u_{i,\mathrm{DC}}$, $i \in \{1, 2\}$ über den Anschluss `Ud` $= u_{i,\mathrm{DC}}$

Alle Anschlüsse sind BNC-Steckverbindungen. Die unbenannten Anschlüsse und die Anschlüsse `ON/OFF` und `ENABLE` werden für das Projektstudium nicht benötigt. Beide Umrichter können durch Drücken des grünen `ON` Knopfes und des roten `OFF` Knopfes ein- bzw. ausgeschalten werden. Die Umrichter sind betriebsbereit, wenn der grüne `ON` Knopf *grün* leuchtet.

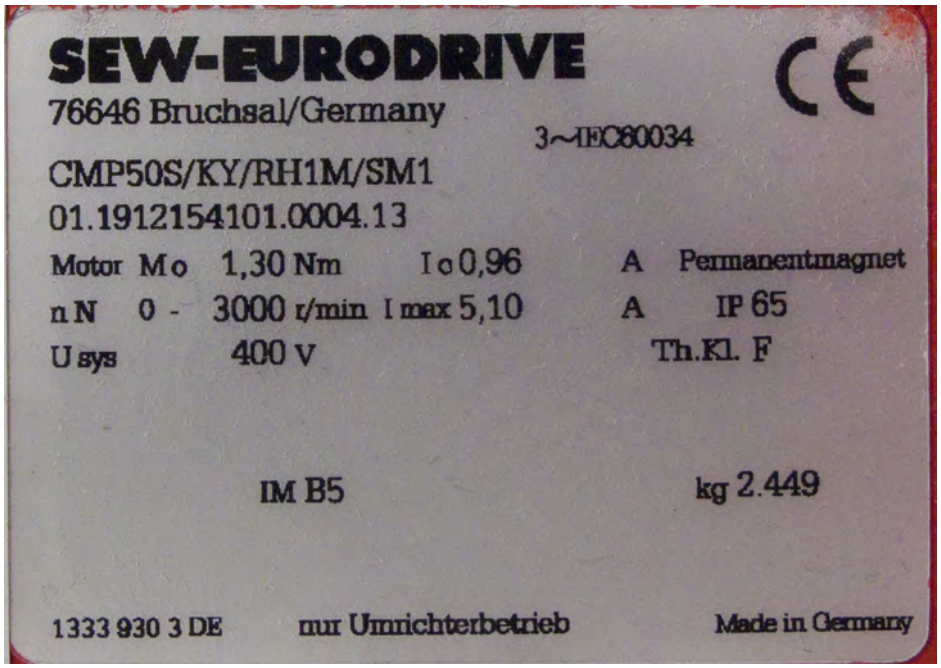


Abbildung 3.3: *Typenschild der Synchronmaschine.*

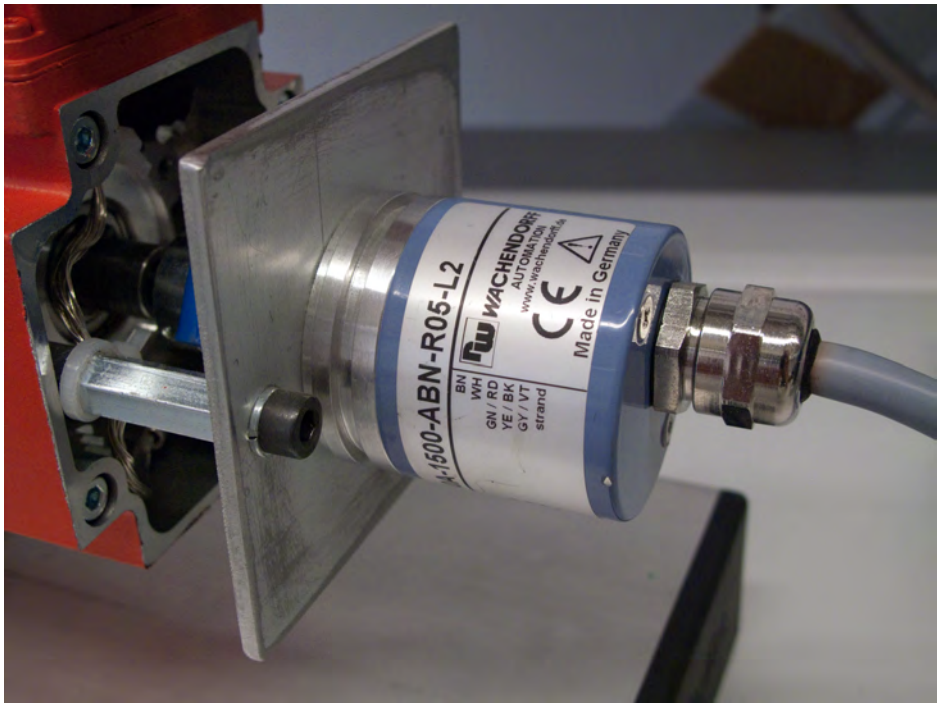


Abbildung 3.4: *Encoder der Synchronmaschine.*

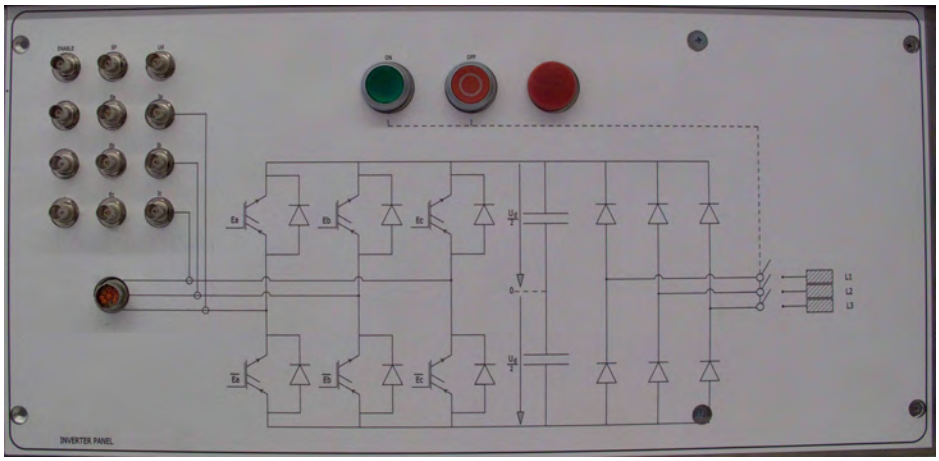


Abbildung 3.5: *Umrichterschnittstelle (Konnektorplatte) für* rechten *Umrichter.*

Abb. 3.7 zeigt das dSPACE Connector Panel. Über das Panel können Mess- und Sollsignale (als Spannungen; Signalwandlung beachten!) zwischen Laboraufbau und Realzeitsystem ausgetauscht werden (siehe dSPACE Dokumentation). Über BNC-Steckverbindungen können analoge und digitale Signale der dSPACE DS1104 Karte zu- oder herausgeführt werden. Es gibt acht A/D Eingangskanäle (`ADCH1...8`) und acht D/A Ausgangskanäle (`DA1...8`). Die digitale I/O Schnittstelle erlaubt die Ein- bzw. Ausgabe von digitalen Signalen; u.a. können die Schaltsignale/-vektoren über die PWM-Kanäle (`SPWM1...9`) dem Zwischenkreisumrichter übergeben werden. Über die Anschlüsse `INCREMENTAL ENCODER 1 & 2` können die Inkrementalgeber der PMSM und der ASM mit dem dSPACE System verbunden werden. Die Sub-D-Stecker `DIGITAL I/O, SLAVE I/O PWM`, `UART RS232` und `UART RS485/RS422` werden während des Projektstudiums nicht benötigt.

3.3 Simulation

Für die spätere Implementierung soll nun vorerst ein valides Modell der PMSM und des 2-Level Umrichters erarbeitet, implementiert und mithilfe von Matlab/Simulink simuliert werden. Basierend auf den Modellen und deren Implementierung soll die kaskadierte Regelung des Antriebes erfolgen und simulativ getestet und validiert werden.

3.3.1 Modellbildung und Verhalten

Das Grundmodell einer Synchronmaschine mit z.B. vergrabenen Permanentmagneten (IPMSM; engl. interior permanent magnet synchronous maschine) und Anisotropie ist im Zeitbereich gegeben durch

$$\left.\begin{aligned}
\text{Elektrischer Statorkreis:}\quad & \boldsymbol{u}_s^s(t) &&= R_s \boldsymbol{i}_s^s(t) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\psi}_s^s(t) && ,\boldsymbol{\psi}_s^s(0) = 0\ [\mathrm{Vs}] \\
\text{Flussverkettung:}\quad & \boldsymbol{\psi}_s^k(t) &&= \underbrace{\begin{bmatrix} L_s^d & 0 \\ 0 & L_s^q \end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{L}_s^k \in \mathbb{R}^{2\times 2}} \boldsymbol{i}_s^k(t) + \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{PM}}^k && ,\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{PM}}^k = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{PM}}^d \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{Mechanik:}\quad & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\omega_M(t) &&= \tfrac{1}{\Theta_M}\big(m_M(t) - m_L(t)\big) && ,\omega_M(0) = 0\ \left[\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \\
\text{Motormoment:}\quad & m_M(t) &&= \tfrac{3}{2}\,p\,\boldsymbol{i}_s^s(t)^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{\psi}_s^s(t) \\
\text{El. Rotorgeschwindigkeit}\quad & \omega_r(t) &&= p\,\omega_M(t)
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

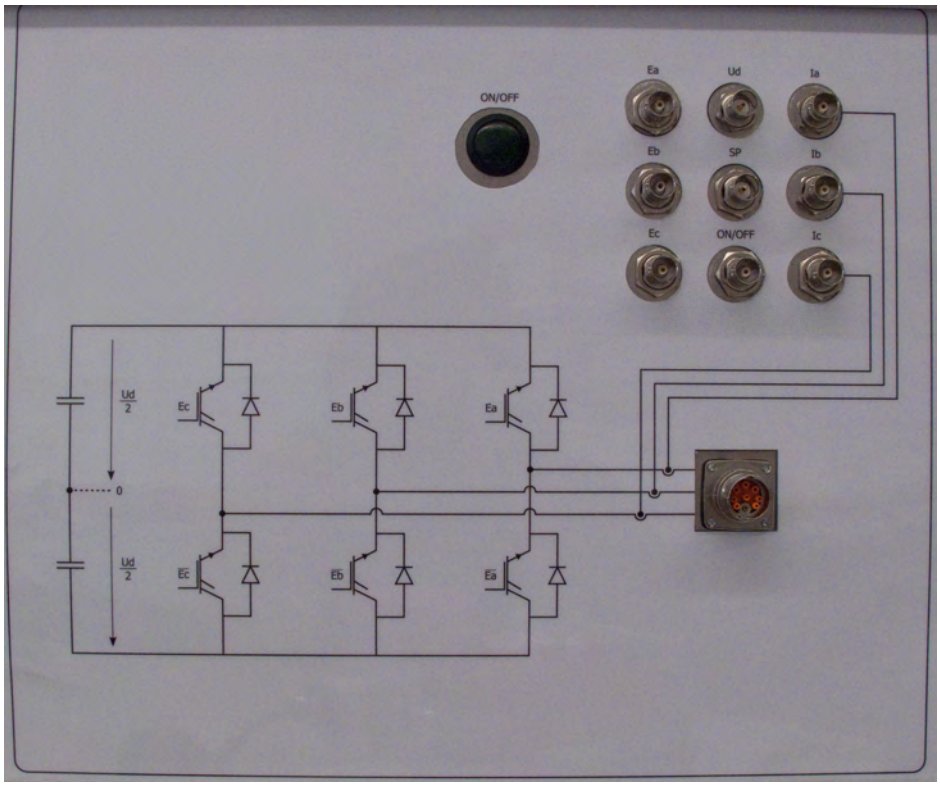


Abbildung 3.6: *Umrichterschnittstelle (Konnektorplatte) für* linken *Umrichter.*

Hierbei sind — jeweils in Stator- bzw. Rotorflussorientierten Koordinaten [Superskript ^{s}, ^{k}] — $\boldsymbol{u}_s^s$ [V] die Statorspannung [Index $_s$], $\boldsymbol{i}_s^s$ [A] der Statorstrom, R_s [Ω] der Statorwiderstand, $\boldsymbol{L}_s^k$ $\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$ die (anisotrope) Statorinduktivität (d.h. $L_s^d \neq L_s^q \neq 0$), $\boldsymbol{\psi}_{\text{PM}}^k$ [Vs] der verkettete Fluss des Permanentmagneten (mit $\psi_{\text{PM}}^d > 0$ [Vs]), p [1] die Anzahl der Polpaare, ω_M $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ die Motorwinkelgeschwindigkeit, ω_r $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ die elektrische Rotorwinkelgeschwindigkeit, Θ_M $\left[\text{kg}\,\text{m}^2\right]$ die (Rotor-)Trägheit, m_M [Nm] das Motormoment und m_L [Nm] das Lastmoment.

Als direkte **Messgrößen** sollen Ihnen im Folgenden, die Strangströme $\boldsymbol{i}_s^{abc}(t)$ im Stator und die *mechanische* Winkelgeschwindigkeit $\omega_M(t)$ zur Verfügung stehen. Die Maschinendaten sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Remark 3.3.1. *Das Modell* (3.1) *ist Matrix-/Vektornotation dargestellt. Für das Projekstudium wird der Gebrauch dieser Notation empfohlen (im Gegensatz zur Darstellung in komplexer Schreibweise). Eine ausführliche Beschreibung der Modellierung und der Regelung von Permanentmagnet-Synchronmaschinen in Matrix-/Vektornotation findet sich in [3].*

Abbildung 3.7: *dSPACE DS1104 Schnittstelle (Connector Panel).*

Größe	**Symbol und Wert (SI)**	
Nennleistung	$P_N =$	[kW]
Nenndrehzahl	$n_N =$	$[\mathrm{min}^{-1}]$
Nennspannung (verkettet)	$u_N^{\mathrm{verk}} =$	[V]
Nennstrom	$i_N^{\mathrm{str}} =$	[A]
Polpaarzahl	$p =$	[1]
Rotorträgheitsmoment	$\Theta_M =$	$[\mathrm{kg\,m}^2]$
Statorwiderstand	$R_s =$	[Ω]
Statorinduktivität	$L_s^d =$	[mH]
	$L_s^q =$	[mH]
Permanentmagnetfluss	ψ_{PM}	[V s]

Tabelle 3.1: *Parameter des untersuchten Synchronmotors*

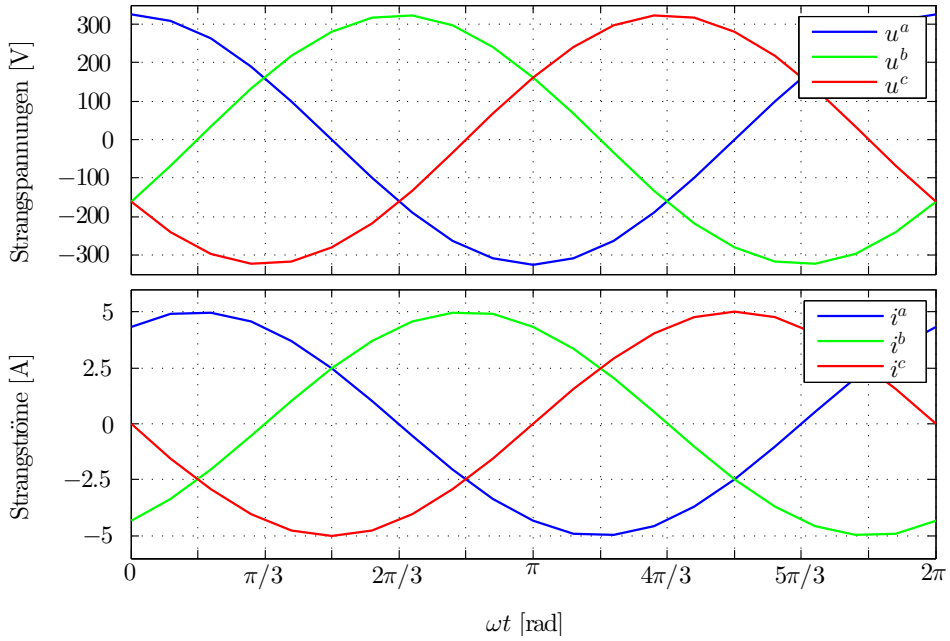


Abbildung 3.8: *Verlauf der Strangspannungen* $\boldsymbol{u}^{abc}$ *und der Strangströme* $\boldsymbol{i}^{abc}$ *des symmetrischen Drehstromsystems.*

3.3.1.1 Allgemeine Raumzeigerdarstellung

Gegeben sei ein symmetrisches Drehstromsystem mit den Strangspannungen $\boldsymbol{u}^{abc} = (u^a, u^b, u^c)^\top$ $[\mathrm{V}]^3$

$$\left.\begin{aligned} u^a(t) &= \hat{u}\cos\Big(\omega t + \varphi_u\Big) \\ u^b(t) &= \hat{u}\cos\Big(\omega t + \varphi_u - \tfrac{2}{3}\pi\Big) \\ u^c(t) &= \hat{u}\cos\Big(\omega t + \varphi_u - \tfrac{4}{3}\pi\Big) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

und den Strangströmen $\boldsymbol{i}^{abc} = (i^a, i^b, i^c)^\top$ $[\mathrm{A}]^3$

$$\left.\begin{aligned} i^a(t) &= \hat{\imath}\cos\Big(\omega t + \varphi_i\Big) \\ i^b(t) &= \hat{\imath}\cos\Big(\omega t + \varphi_i - \tfrac{2}{3}\pi\Big) \\ i^c(t) &= \hat{\imath}\cos\Big(\omega t + \varphi_i - \tfrac{4}{3}\pi\Big) \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Der Scheitelwert der Spannung beträgt $\hat{u} = \sqrt{2}\cdot 230\,\mathrm{V}$, der Scheitelwert des Stroms $\hat{\imath} = 5\,\mathrm{A}$, die Frequenz besitzt den Wert $f = 50\,\mathrm{Hz}$ ($\omega = 2\pi f$), der Nullphasenwinkel der Spannung ist $\varphi_u = 0\,\mathrm{rad}$, der Nullphasenwinkel des Stroms $\varphi_i = -\pi/6\,\mathrm{rad}$.

Aufgabe 3.3.2 (Clarke- und Park-Transformation)**.**
In dieser Aufgabe wird das beliebige k-Koordinatensystem (d, q) *so gewählt, dass der Raumzeiger des Stroms stets auf der d-Achse des k-Koordinatensystems liegt. Nutzen Sie in dieser Aufgabe die Kerninformationen aus Abschnitt A und C.3!*

(a) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ *die Strangspannungen* $\boldsymbol{u}^{abc}$ *und die Strangströme*

$\boldsymbol{i}^{abc}$ *des symmetrischen Drehstromsystems!*

(b) Berechnen Sie zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ *die Momentanleistung* $p_{3\sim}$ *aus den Stranggrößen* $\boldsymbol{u}^{abc}$ *und* $\boldsymbol{i}^{abc}$*!*

(c) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ *den Spannungsraumzeiger* $\boldsymbol{u}^s$ *und den Stromraumzeiger* $\boldsymbol{i}^s$ *in statorfesten Koordinaten! Wie lautet jeweils deren Betrag?*

(d) Zeichen Sie die beiden Raumzeiger $\boldsymbol{u}^s$ *und* $\boldsymbol{i}^s$ *(zum Zeitpunkt* $t = 0\,\mathrm{s}$*) in das statorfeste Koordinatensystem!*

(e) Berechnen Sie zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ *die Momentanleistung* $p_{3\sim}$ *aus den beiden Raumzeigern* $\boldsymbol{u}^s$ *und* $\boldsymbol{i}^s$*!*

(f) Transformieren Sie die beiden Raumzeiger $\boldsymbol{u}^s$ *und* $\boldsymbol{i}^s$ *(zum Zeitpunkt* $t = 0\,\mathrm{s}$*) in das* k*-Koordinatensystem!*

(g) Wiederholen Sie die Teilaufgaben (a)–(f) für den Zeitpunkt $t = \frac{5\pi}{6\omega}$*!*

(h) Welche Bahnkurve durchlaufen die Spitzen der Raumzeiger innerhalb einer Periode (Periodendauer: $T = \frac{1}{f}$*)?*

(i) Die Strangspannungen $\boldsymbol{u}^{abc}$ *seien gegeben als*

$$u^a(t) = \hat{u}\cos\left(\omega t + \varphi_u\right) \tag{3.4}$$
$$u^b(t) = \hat{u} \tag{3.5}$$
$$u^c(t) = -\hat{u} \tag{3.6}$$

Überlegen Sie sich, welchen Verlauf die Bahnkurve der Spitze des zugehörigen Spannungsraumzeigers nun beschreibt! Plotten Sie den Verlauf in Matlab ($t \in [0, T]$*)!*

(j) Die Strangspannungen $\boldsymbol{u}^{abc}$ *seien gegeben als*

$$u^a(t) = \hat{u}\cos\left(\omega t + \varphi_u\right) + \frac{3}{2}\left(2\frac{t}{T} - 1\right)\hat{u} \tag{3.7}$$
$$u^b(t) = \hat{u}\cos\left(\omega t + \varphi_u - \frac{2}{3}\pi\right) \tag{3.8}$$
$$u^c(t) = \hat{u}\cos\left(\omega t + \varphi_u - \frac{4}{3}\pi\right) \tag{3.9}$$

Überlegen Sie sich, welchen Verlauf die Bahnkurve der Spitze des zugehörigen Spannungsraumzeigers nun beschreibt! Plotten Sie den Verlauf in Matlab ($t \in [0, 5T]$*)!*

3.3.1.2 Rotorflussorientierung der Permanentmagnet-Synchronmaschine

Aufgabe 3.3.3 (Modellierung im k-Koordinatensystem)**.**
Im Folgenden gelte $\dot{\phi}_k(t) = \omega_k(t)$ *bei Anfangswert* $\phi_k(0) = 0$ [rad]*. Das* (d, q)*-Koordinatensystem ist entsprechend dem Rotorfluss* ψ^d_{PM} *des Permanentmagneten ausgerichtet.*

(a) Transformieren Sie den elektrischen Statorkreis in (3.1) in das k*-Koordinatensystem! (Hinweis: Nutzen Sie die Park-Transformationsmatrix)*

(b) *Transformieren Sie die Flussverkettung in (3.1) in das statorfeste-Koordinatensystem! Ist die Statorinduktivität $\boldsymbol{L}_s^s$ (in Stator-Koordinaten) konstant und/oder eine Diagonalmatrix?*

(c) *Transformieren Sie die Momentenbildung in (3.1) in das k-Koordinatensystem!*

(d) *Berechnen Sie das Motormoment in (3.1) in Abhängigkeit von ψ_{PM}^d, i_s^d und i_s^q und den Parametern p, L_s^d und L_s^q! Welche Komponenten in der Momentenbildung können unterschieden werden?*

(e) *Zeichnen Sie den Signalflussplan der Momentenbildung der IPMSM in Flussorientierung mit den Eingängen i_s^d, i_s^q und m_L und den Ausgängen ω_M und ω_r!*

(f) *Bestimmen Sie aus den Strangströmen $\boldsymbol{i}_s^{abc}(t)$ die Statorströme $\boldsymbol{i}_s^k(t)$ im k-Koordinatensystem! (Hinweis: Clarke-Transformation und Park-Transformation)*

(g) *Bestimmen Sie die Dynamik der Strom-Komponenten i_s^d und i_s^q in Abhängigkeit von R_s, L_s^d, L_s^q, ψ_{PM}^d und ω_k!*

3.3.1.3 Parameterbestimmung der Permanentmagnet-Synchronmaschine

Ziel ist es die Parameter der PMSM zu bestimmen und diese in Tab. 3.1 einzutragen. Die Parameter sind essentiell für Simulation, Regelung und Implementierung.

Aufgabe 3.3.4 (Bestimmung des Statorwiderstands, des Trägheitsmoments und der Polpaarzahl)**.**

(a) *Bestimmen Sie Statorwiderstand R_s, Trägheitsmoment Θ_M und Polpaarzahl p (nutzen Sie Typenschild und Benutzerhandbuch des Antriebes)!*

(b) *Welche weiteren Möglichkeiten gibt es Statorwiderstand R_s, Trägheitsmoment Θ_M und Polpaarzahl p zu bestimmen?*

Aufgabe 3.3.5 (Bestimmung der Statorinduktivität)**.**

(a) *Stellen Sie ausgehend von der Stromdifferentialgleichung im k-KoSy der Maschine in Rotorflussorientierung die Übertragungsfunktion $F_{u_s^d \to i_s^d}(s) = \frac{i_s^d(s)}{u_s^d(s)}$ bei blockierter Welle (d.h. $\omega_M(t) = 0$ für alle $t \geq 0$) auf!*

(b) *Bestimmen Sie anhand der Sprungantwort der Übertragungsfunktion $F_{u_s^d \to i_s^d}(s)$ die Zeitkonstante T_s^d [s] und damit die Induktivität L_s^d [Vs/A]!*

(c) *Wiederholen Sie die Teilaufgaben (a) und (b) und bestimmen Sie den Wert für L_s^q [Vs/A]!*

Aufgabe 3.3.6 (Bestimmung des verketteten Flusses des Permanentmagneten)**.**

(a) *Wie kann der verkettete Fluss des Permanentmagneten bestimmt werden, wenn die Welle der Maschine angetrieben werden kann? Leiten Sie die Gleichungen dafür her!*

(b) *Welche weiteren Möglichkeiten gibt es ψ_{PM} [Vs] zu bestimmen?*

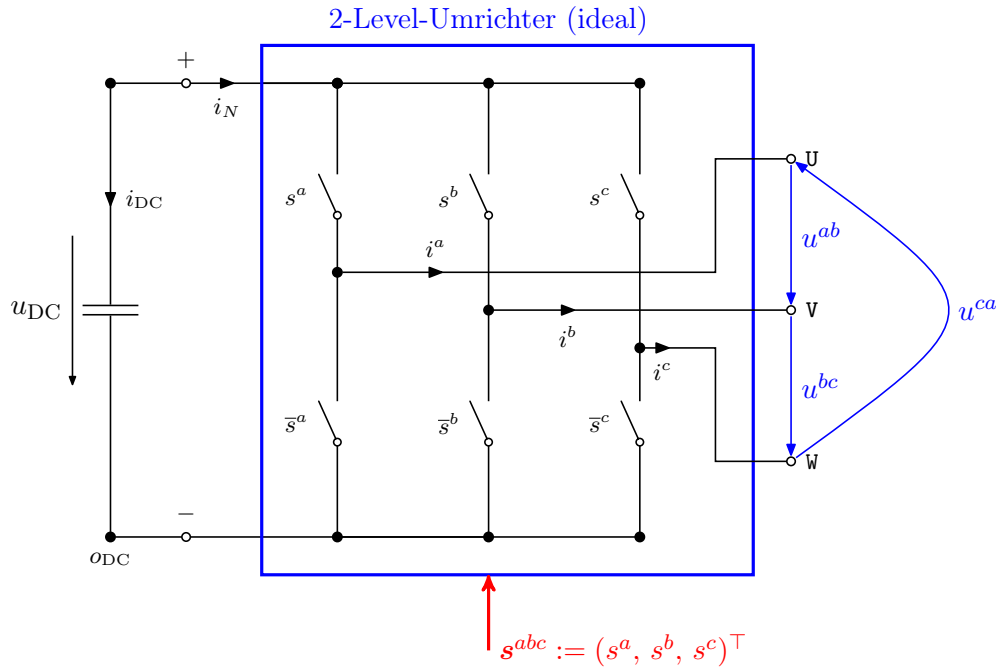


Abbildung 3.9: *Idealer dreiphasiger Umrichter*

3.3.1.4 Spannungszwischenkreisumrichter

In dieser Aufgabe wird der Spannungszwischenkreisumrichters mit konstanter Zwischenkreisspannung u_{DC} und idealisierten Leistungschaltelementen betrachtet. In Abbildung 3.9 ist der zu untersuchende Umrichter mit allen relevanten Benennungen genauer dargestellt. Ziel ist es das Spannungshexagon (siehe Abb. 3.10) nachzubilden. Hierzu sollen zwei einfache PWM-Verfahren implementiert und verglichen werden.

> Hinweis: Um Ihnen die Implementierung in Matlab/Simulink zu erleichtern, nutzen Sie die unter `http://www.cres.mse.tum.de/index.php?id=eof` zur Verfügung gestellten Dateien `VSI_Simulation.mdl`, `VSI_Simulation_Init.m` und `VSI_Filterung.m` (siehe `PMSM.zip`)!

Aufgabe 3.3.7 (Puls-Weiten-Modulation und Modellierung)**.**

(a) Laden Sie `VSI_Simulation_Init.m` *und öffnen Sie* `VSI_Simulation.mdl`*. Implementieren Sie ein* symmetrisches *und* asymmetrisches*, regular-sampled PWM-Verfahren (siehe [19, Abschnitt 8.4.12])!*

(b) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Vektor der verketteten Spannung $\boldsymbol{u}^{abc}_{verk} := (u^{ab},\ u^{bc},\ u^{ca})^\top\ [\mathrm{V}]^3$ *am Umrichterausgang, dem Vektor der Schalterstellungen* $\boldsymbol{s}^{abc}\ [1]^3$ *und der Zwischenkreisspannung* $u_{DC}\ [\mathrm{V}]$ *an!*

(c) Geben Sie für eine symmetrische Last in Sternschaltung mit freiem Nullpunkt den Zusammenhang zwischen dem Vektor der Strangspannungen $\boldsymbol{u}^{abc} := (u^a,\ u^b,\ u^c)^\top\ [\mathrm{V}]^3$*, dem Vektor der Schalterstellungen* $\boldsymbol{s}^{abc}\ [1]^3$ *und der Zwischenkreisspannung* $u_{DC}\ [\mathrm{V}]$ *an!*

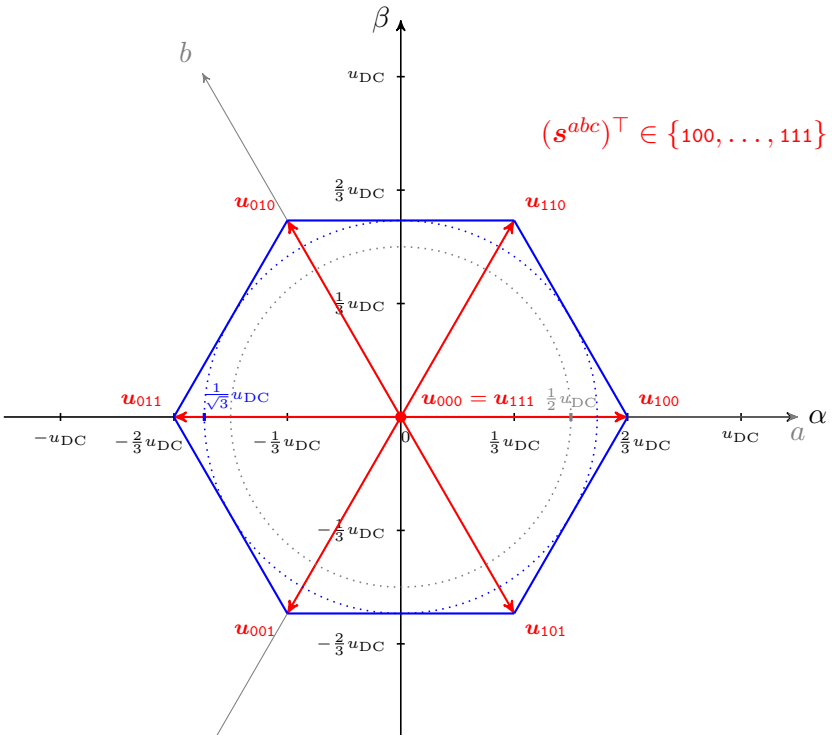


Abbildung 3.10: *Spannungshexagon.*

(d) Ergänzen Sie in Matlab/Simulink das Modell des Umrichters mit den Eingängen u_{DC}, $\boldsymbol{s}^{abc}$ und den Ausgängen $\boldsymbol{u}^{abc}_{verk}$, $\boldsymbol{u}^{abc}$ um die zuvor beschriebenen Zusammenhänge!

(e) Führen Sie nun das Matlab-Skript `VSI_Filterung.m` aus! Was erkennen Sie in dem Plot? Welche Unterschiede ergeben sich für symmetrical und asymmetrical regular-sampled PWM?

(f) Bestimmen Sie den zeitlichen Versatz zwischen dem Referenzsignal und dem gefilterten PWM-Signal!

3.3.1.5 Hochlauf und Betrieb der Permanentmagnet-Synchronmaschine

Hinweis: Um Ihnen die Implementierung in Matlab/Simulink zu erleichtern, nutzen Sie die unter `http://www.cres.mse.tum.de/index.php?id=eof` zur Verfügung gestellten Dateien `PMSM_Simulation.mdl` und `PMSM_Simulation_Init.m` (siehe `PMSM.zip`)!

Aufgabe 3.3.8 (Permanenterregte Synchronmaschine)**.**

(a) Drücken Sie den Statorstromraumzeiger $\boldsymbol{i}^s_s$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\psi}^s_s$ und ψ^s_{PM} aus. Stellen Sie anschließend den Signalflussplan der Synchronmaschine mit oberflächenmontierten Magneten auf (Eingänge: $\boldsymbol{u}^s_s$, m_L; Ausgänge: ω_m, m_M, $\boldsymbol{i}^s_s$, $\boldsymbol{\psi}^s_s$).

(b) Öffnen Sie `PMSM_Simulation.mdl` und implementieren Sie das Modell der PMSM. Fügen Sie zudem eine ideale Spannungsquelle hinzu und verbinden Sie diese mit dem Motormodell. Ergänzen Sie `PMSM_Simulation_Init.m` um die nötigen Parameterwerte aus Tab. 3.1!

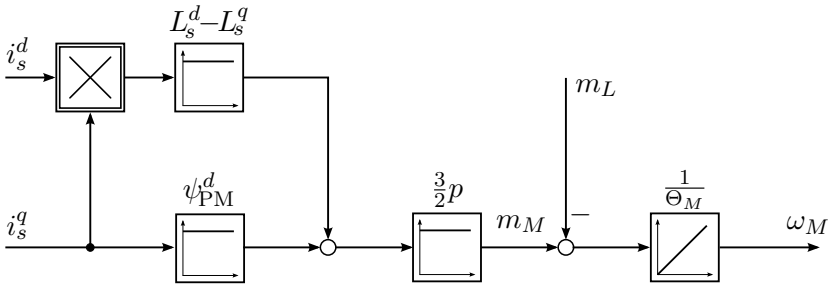


Abbildung 3.11: *Signalflussplan der IPMSM in Rotorflussorientierung (k-Koordinatensystem).*

Simulieren Sie das Verhalten der Synchronmaschine mit den Parametern aus Tabelle 3.1 und ohne Lastmoment, wenn diese an das starre dreiphasige Netz (400 [V], 50 [Hz]) angeschlossen wird. Begründen Sie den sich ergebenden Drehzahlverlauf.

(c) Modifizieren Sie die Spannungsquelle, um einen Hochlauf der Maschine auf halbe Nenndrehzahl zu ermöglichen. Erhöhen Sie hierzu die Frequenz anfänglich linear mit der Zeit bis diese die halbe Nennfrequenz erreicht. Ist es ratsam, eine der Frequenz proportionale Versorgungsspannung einzuprägen? Achten Sie darauf, dass der Nennstrom i_{NY} nicht überschritten wird.

(d) Verwenden Sie folgenden Lastmomentverlauf, um das Verhalten des Motors unter Last zu untersuchen:

$$m_L(t) = m_N \sigma(t - t_M),\ t_M = 3\,[\mathrm{s}]$$

Welche Auswirkung hat das Lastmoment auf die Maschinendrehzahl? Wie erfolgt der elektromechanische Energiewandlungsprozess in diesem Fall? Begründen Sie Ihre Antworten mit Aufnahmen von zeitlichen Verläufen der relevanten Größen.

Aufgabe 3.3.9 (Bestimmung des Anfangswinkels des Rotors)**.**
Für die Parktransformation in das rotorflussorientierte (d,q)-Koordinatensystem wird der Rotorwinkel ϕ_k benötigt. Dieser kann über folgenden Zusammenhang berechnet werden:

$$\phi_k(t) = \int_0^t \omega_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \phi_k(0) \tag{3.10}$$

Um den Winkel ϕ_k [rad] bestimmen zu können, ist – neben der Kenntnis der elektrischen Rotorwinkelgeschwindigkeit ω_k [rad/s] – der Wert für den Anfangswinkel $\phi_k(0)$ nötig. Wie kann dieser für Maschinen ohne Reluktanz ($L_s^d = L_s^q$) bestimmt werden?

3.3.2 Regelung

Aufgabe 3.3.10 (Drehzahl- und Stromregelung der IPMSM)**.**

(a) Unter der Annahme einer idealen Rotorflussorientierung und bereits implementierter d,q-Stromregelkreise (approximiert durch PT_1 Ersatzübertragungsfunktionen) soll nun ein Drehzahlregler ausgelegt werden. Ergänzen Sie in Abb. 3.11 die Darstellung der IPMSM in Rotorflussorientierung um die PT_1 Ersatzstromregelkreise! Benennen Sie die Eingänge mit $i_{s,\mathrm{ref}}^d$ und $i_{s,\mathrm{ref}}^q$ [A] und die Ersatzzeitkonstanten mit T_{ers,i_s^d} und T_{ers,i_s^q} [s]!

(b) Mithilfe der Optimierungstabelle legen Sie für $i_{s,\mathrm{ref}}^d = i_s^d = 0$ [Vs] einen Drehzahlregler aus!

(c) Identifizieren Sie Kopplungs- und Störterme in den Stromdynamiken aus Aufgabe 3.7(g)! Unter welchen Voraussetzungen können Sie diese kompensieren?

(d) Für eine ideale Kompensation der Kopplungs- und Störterme bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $F_{S,\,i_s^d}(s) = \frac{i_s^d(s)}{u_s^d(s)}$ *und* $F_{S,\,i_s^q}(s) = \frac{i_s^q(s)}{u_s^q(s)}$ *(ideale Entkopplung)!*

(e) Bestimmen Sie Zeitkonstanten T_s^d *und* T_s^q *und Verstärkungen* V_s^d *und* V_s^q*!*

(f) Mithilfe der Optimierungstabelle legen Sie die Stromregler

$$F_{R,i_s^d}(s) = \frac{u_s^d(s)}{i_{s,\mathrm{ref}}^d(s) - i_s^d(s)} \qquad \textit{und} \qquad F_{R,i_s^q}(s) = \frac{u_s^q(s)}{i_{s,\mathrm{ref}}^q(s) - i_s^q(s)}$$

beider Stromkomponenten aus! (Annahme: keine Messwertglättung und Umrichter als PT_1 *modelliert mit Zeitkonstante* T_{str} *und Verstärkung* V_{str}*)*

(g) In welchen Situationen wählen Sie $i_{s,\mathrm{ref}}^d \neq 0$*? Was sollten Sie beachten?*

(h) Was passiert für $\psi_{\mathrm{PM}}^d = 0$ [Vs]*? Welche Art von Synchronmaschine liegt vor?*

(i) Wann gilt $L_s^d = L_s^q$*? Ist in diesem Fall noch Feldschwächung möglich?*

3.4 Implementierung

Mit dem Vorwissen aufgrund des Simulationsteils soll nun die PMSM des Laboraufbaus geregelt werden. Das PWM-Verfahren wurde in der dSPACE DS1104 Karte und einem vorgefertigtem Block bereits implementiert.

> Hinweis: Um Ihnen die Implementierung in Matlab/Simulink zu erleichtern, nutzen Sie die unter `http://www.cres.mse.tum.de/index.php?id=eof` zur Verfügung gestellten Dateien `PMSM_Implementierung.mdl` und `PMSM_Implementierung_Init.m` (siehe `PMSM.zip`)!

Aufgabe 3.4.1 (Grobe Arbeitsschritte)**.**

(a) Machen Sie sich mit dem Laboraufbau vertraut! Nutzen Sie hierzu die Handbücher von dSPACE und SEW.

(b) Ergänzen Sie die nötigen Daten in `PMSM_Implementierung_Init.m` *schrittweise!*

(c) Implementieren Sie sukzessive die kaskadierten Regelkreisstrukturen aus der Simulation in `PMSM_Implementierung.mdl`*! Beachten Sie dass für die Rotorflussorientierung der Anfangswinkel bei jedem Neustart initialisiert werden muss!*

Kapitel 4

Projekt 3: Asynchronmaschine

4.1 Problemstellung

In diesem Projekt sollen die erlernten Modellierungs- und Regelungstechniken der PMSM auf Modellierung und Regelung einer Asynchronmaschine (ASM) übertragen werden. Für eine ASM sollen

- Verfahren zur Rotorflussorientierung,
- Statorstromregelung und
- Drehzahlregelung

entworfen, simuliert und implementiert werden. Als Regelkreisstruktur wird wieder die (in der Industrie übliche) Kaskadenregelung verwendet. Die kaskadierten Regelkreisstrukturen werden mithilfe von Matlab/Simulink entworfen, auf einem dSPACE Realzeitsystem (DS1104) implementiert und an einer Asynchronmaschine getestet und ausgewertet.

Lernziele und -inhalte:

- Verstehen der Funktionsweise einer Asynchronmaschine und eines 2-Level Umrichters (Spannungszwischenkreisumrichter),
- Verdrahten des Laboraufbaus (u.a. Antrieb, Schnittstelle, Realzeitsystem),
- Finden, Lesen und Verwenden von Hardware-Dokumentationen,
- Entwerfen und Implementieren eines Flussschätzers,
- Entwerfen, Implementieren und Bewerten der Strom- und Drehzahlregelung und
- Rapid-Prototyping mithilfe von Matlab/Simulink von kaskadierten Regelkreisstrukturen auf einem dSPACE-Realzeitsystem und Programmierung einer Bedienung-GUI mithilfe ControlDesk

4.2 Laboraufbau

Der Laboraufbau zur Implementierung der ASM-Regelung ist identisch zum Laboraufbau der PMSM (siehe Abschnitt 3.2). Die verwendete Asynchronmaschine `DRS71S8/2/FI/TF/ES7R` der Firma SEW-Eurodrive ist in Abb. 4.1 abgebildet. Das zugehörige Typenschild zeigt Abb. 4.2.

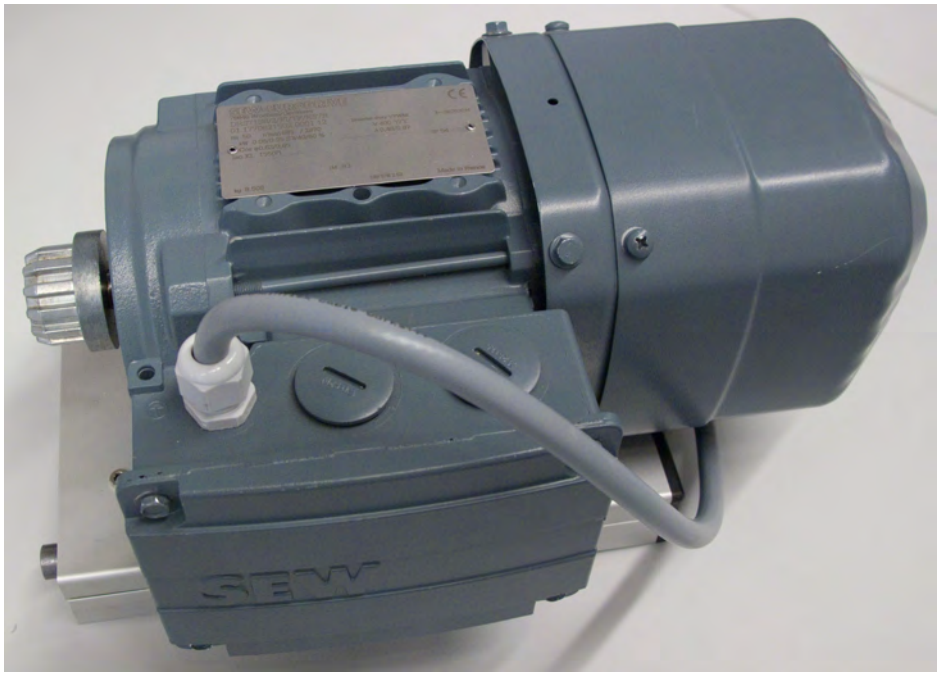


Abbildung 4.1: *Asynchronmaschine.*

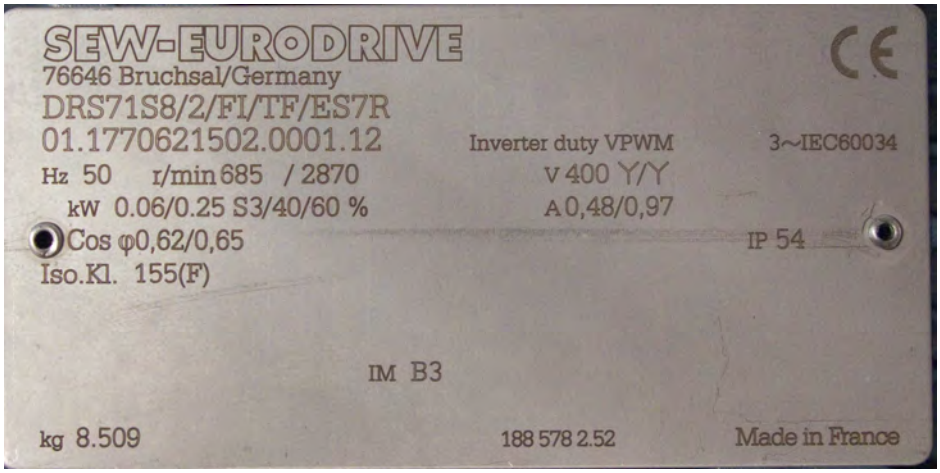


Abbildung 4.2: *Typenschild der Asynchronmaschine.*

Größe	**Symbol und Wert (SI)**	
Nennleistung	$P_N = 0{,}25$	[kW]
Nenndrehzahl	$n_N = 2870$	$\left[\text{min}^{-1}\right]$
Nennspannung (Sternschaltung, verkettet)	$u_N^{\text{verk}} = 400$	[V]
Nennstrom (Sternschaltung)	$i_N^{\text{str}} = 0{,}97$	[A]
Nennfrequenz	$f_N = 50$	[Hz]
Wirkfaktor	$\cos\varphi = 0{,}65$	[1]
Rotorträgheitsmoment	$\Theta_M = 7{,}25 \cdot 10^{-4}$	$\left[\text{kg}\,\text{m}^2\right]$
Statorwiderstand	$R_s = 40$	[Ω]
Rotorwiderstand (auf Statorseite umgerechnet)	$R_r = 12$	[Ω]
Statorinduktivität	$L_s = 800$	[mH]
Rotorinduktivität (auf Statorseite umgerechnet)	$L_r = 800$	[mH]
Koppelinduktivität	$M = 700$	[mH]

Tabelle 4.1: *Parameter des betrachteten Asynchronmotors*

4.3 Simulation

Für die spätere Implementierung soll nun vorerst ein valides Modell der ASM (und des 2-Level Umrichters) erarbeitet, implementiert und mithilfe von Matlab/Simulink simuliert werden. Basierend auf den Modellen und deren Implementierung soll die kaskadierte Regelung des Antriebes erfolgen und simulativ getestet und validiert werden.

4.3.1 Modellbildung und Verhalten

Das Grundmodell einer Asynchronmaschine mit *linearer* Flussverkettung (d.h. ohne Hysterese und Sättigung) ist im Zeitbereich gegeben durch

$$\left.\begin{aligned}
\text{Elektrischer Statorkreis:} \quad & \boldsymbol{u}_s^s(t) &&= R_s \boldsymbol{i}_s^s(t) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_s^s(t) && ,\boldsymbol{\psi}_s^s(0) = 0\ [\text{Vs}] \\
\text{Elektrischer Rotorkreis:} \quad & \boldsymbol{u}_r^r(t) &&= R_r \boldsymbol{i}_r^r(t) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_r^r(t) && ,\boldsymbol{\psi}_r^r(0) = 0\ [\text{Vs}] \\
\text{Flussverkettung:} \quad & \boldsymbol{\psi}_s^s(t) &&= L_s \boldsymbol{i}_s^s(t) + M \boldsymbol{i}_r^s(t) && \\
& \boldsymbol{\psi}_r^r(t) &&= L_r \boldsymbol{i}_r^r(t) + M \boldsymbol{i}_s^r(t) && \\
\text{Mechanik:} \quad & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_M(t) &&= \tfrac{1}{\Theta_M}\big(m_M(t) - m_L(t)\big) && ,\omega_M(0) = 0\ [\text{rad/s}] \\
\text{Motormoment:} \quad & m_M(t) &&= \tfrac{3}{2} p\, \boldsymbol{i}_s^s(t)^\top \boldsymbol{J} \boldsymbol{\psi}_s^s(t) && \\
\text{El. Rotorgeschwindigkeit} \quad & \omega_r(t) &&= p\,\omega_M(t) &&
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Hierbei sind — jeweils in Stator- bzw. Rotorkoordinaten [Superskript ^{s}, ^{r}] — $\boldsymbol{u}_s^s$, $\boldsymbol{u}_r^r$ [V] die Stator- bzw. Rotorspannung [Index $_s$, $_r$], $\boldsymbol{i}_s^s$, $\boldsymbol{i}_r^r$ [A] der Stator- bzw. Rotorstrom, R_s, R_r [Ω] der Stator- bzw. Rotorwiderstand, L_s, L_r $\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$ die Stator- bzw. Rotorinduktivität und M $\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$ die Koppelinduktivität (oder Hauptinduktivität), p [1] die Anzahl der Polpaare, ω_M $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ die Motorwinkelgeschwindigkeit, ω_r $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ die elektrische Rotorwinkelgeschwindigkeit, Θ_M $\left[\text{kg}\,\text{m}^2\right]$ die (Rotor-)Trägheit, m_M [Nm] das Motormoment und m_L [Nm] das Lastmoment (Störung bzw. Reibung).

Als direkte **Messgrößen** sollen Ihnen im Folgenden, die Strangströme $\boldsymbol{i}_s^{abc}(t)$ im Stator und die Winkelgeschwindigkeit $\omega_M(t)$ zur Verfügung stehen.

Hinweis: Um Ihnen die Implementierung in Matlab/Simulink zu erleichtern, nutzen Sie die unter zur Verfügung gestellten Dateien `ASM_Simulation.mdl` und `ASM_Simulation_Init.m` (siehe `ASM.zip`)!

Aufgabe 4.3.1 (Funktionsprinzip und Verhalten).
Laden Sie das Initialisierungsskript `ASM_Simulation_Init.m` *und öffnen Sie die Simulink-Vorlage* `ASM_Simulation.mdl`.

(a) *Implementieren Sie den Statorkreis und Rotorkreis aus (4.1) als Subsystem unter Berücksichtigung der Flussverkettung! Eingänge sind Statorspannung $\boldsymbol{u}_s^s$ und Rotorspannung $\boldsymbol{u}_r^r$. (Hinweis: Beachten Sie bei der Verkopplung zwischen Stator und Rotor notwendige Koordinatentransformationen!)*

(b) *Implementieren Sie die Mechanik aus (4.1) als Subsystem unter Berücksichtigung der Momentenerzeugung! Eingänge sind Statorstrom $\boldsymbol{i}_s^s$, Statorfluss $\boldsymbol{\psi}_s^s$ und Lastmoment m_L.*

(c) *Die ASM wird mit den Klemmspannungen $\boldsymbol{u}_s^{abc}$ (Eingang) gespeist und besitzt einen Käfigläufer. Erweitern Sie Ihr Modell entsprechend! (Hinweis: Clarke-Transformation)*

(d) *Als Ausgänge sollen die Stator-Strangströme $\boldsymbol{i}_s^{abc}$, die Rotor-Strangströme $\boldsymbol{i}_r^{abc}$ (zur Beobachtung) und die Winkelgeschindigkeit ω_M zur Verfügung stehen. Erweitern Sie Ihr Modell entsprechend! (Hinweis: Clarke-Transformation)*

(e) *Als Spannungsquelle zur Vorgabe der Klemmspannungen implementieren Sie (i) das reguläre Drehstromnetz mit $\boldsymbol{u}_s^{abc} = \hat{u}\big(\cos(2\pi f_s t), \cos(2\pi f_s t + \frac{2\pi}{3})\cos(2\pi f_s t + \frac{4\pi}{3})\big)^\top$ (mit $\hat{u} = \sqrt{2}\cdot 230$ [V] und $f_s = 50$ [Hz]) und (ii) einen U-Umrichter mit Puls-Weiten-Modulation (PWM) bei (variabler) Trägerfrequenz $f_T \in \{1000, \ldots, 8000\}$ [Hz] und Trägeramplitude $\sqrt{2}\cdot 230$ [V]! (Hinweis: zur PWM siehe D. Schröder, "Elektrische Antriebe: Regelung von Antriebssystemen", Springer-Verlag, 2009, Abschnitt 15.3)*

(f) *Ergänzen Sie nötige Daten in* `ASM_Simulation_Init.m`*! Nutzen und prüfen (z.B. Handbuch) Sie hierzu die Daten aus Tab. 4.1!*

(g) *Simulieren Sie Ihre ASM mit (i) Drehstromnetz und (ii) U-Umrichter und PWM! Belasten Sie Ihre Maschine mit einem Lastsprung $m_L(t) = 30\,\sigma(t-0.25)$ [Nm]! Betrachten Sie Stator-Strangströme $\boldsymbol{i}_s^{abc}$, Rotor-Strangströme $\boldsymbol{i}_r^{abc}$, Winkelgeschwindigkeit ω_M und angelegte Spannungen $\boldsymbol{u}_s^{abc}$!*

Aufgabe 4.3.2 (Modellierung im k-Koordinatensystem).
Im Folgenden gelte $\dot{\phi}_k(t) = \omega_k(t)$ bei Anfangswert $\phi_k(0) = 0$ [rad]. Nutzen Sie die Zusammenhänge aus Abschnitt 2 der Formelsammlung!

(a) *Transformieren Sie den elektrischen Statorkreis aus (4.1) in das k-Koordinatensystem! (Hinweis: Nutzen Sie die Park-Transformationsmatrix)*

(b) *Transformieren Sie den elektrischen Rotorkreis aus (4.1) in das k-Koordinatensystem!*

(c) *Transformieren Sie die Flussverkettungen aus (4.1) in das k-Koordinatensystem!*

(d) *Die Asynchronmaschine hat einen Käfigläufer. Wie vereinfacht sich der elektrische Rotorkreis in (4.1)?*

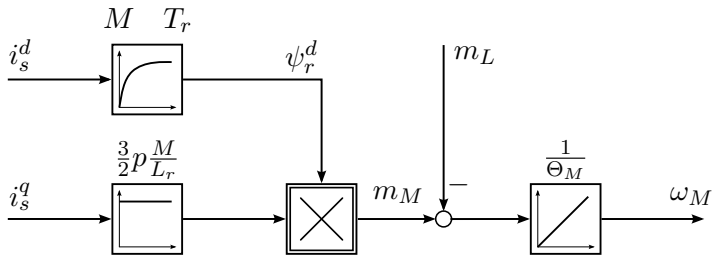


Abbildung 4.3: *Signalflussplan der ASM in Rotorflussorientierung (k-Koordinatensystem).*

(e) Bestimmen Sie aus den Strangströmen $\boldsymbol{i}_s^{abc}(t)$ die Statorströme $\boldsymbol{i}_s^k(t)$ im k-Koordinatensystem! (Hinweis: Clarke-Transformation und Park-Transformation)

Aufgabe 4.3.3 (Rotorflussorientierung)**.**
Im Folgenden sei das (d,q)-Koordinatensystem entsprechend dem Rotorfluss $\boldsymbol{\psi}_r$ ausgerichtet.

(a) Was gilt für $\boldsymbol{\psi}_r^k(t)$ in Rotorflussorientierung (d.h. das k-Koordinatensystem ist so ausgerichtet, dass die d-Achse in Richtung des Rotorflusses zeigt)?

(b) Bestimmen Sie die Dynamik der Rotorfluss-Komponente ψ_r^d in Abhängigkeit der Statorstrom-Komponente i_s^d und den Parametern M, R_r und L_r!

(c) Berechnen Sie das Motormoment aus (4.1) in Abhängigkeit der Rotorfluss-Komponente ψ_r^d, der Statorstrom-Komponente i_s^q und den Parametern p, M, R_r und L_r!

(d) Zeichnen Sie den Signalflussplan der ASM in Rotorflussorientierung mit den Eingängen i_s^d, i_s^q und m_L und den Ausgängen ω_M und ω_r!

(e) Erläutern Sie Analogien zur Gleichstrommaschine!

*(f) Um die vereinfachte Darstellung der ASM in Rotorflussorientierung dynamisch garantieren zu können, müssen Sie die "*Steuerbedingung*" einhalten. Leiten Sie diese her!*

4.3.2 Regelung

Aufgabe 4.3.4 (Drehzahlregelung der ASM)**.**
Unter der Annahme einer idealen Rotorflussorientierung (Steuerbedingung wird exakt eingehalten) und bereits implementierter d,q-Stromregelkreise (approximiert durch PT_1 Ersatzübertragungsfunktionen) soll nun ein Fluss- und Drehzahlregler ausgelegt werden.

(a) Ergänzen Sie in Abb. 4.3 die Darstellung der ASM in Rotorflussorientierung um die PT_1 Ersatzstromregelkreise! Benennen Sie die Eingänge mit $i_{s,\mathrm{ref}}^d$ und $i_{s,\mathrm{ref}}^q$ [A] und die Ersatzzeitkonstanten mit T_{ers,i_s^d} und T_{ers,i_s^q} [s]!

(b) Mithilfe der Optimierungstabelle legen Sie für konstanten *Rotorfluss $\psi_r^d > 0$ [Vs] einen Drehzahlregler aus!*

(c) Wie können Sie aus den gemessen Strangströmen $\boldsymbol{i}_s^{abc}$ den Rotorfluss ψ_r^d nachbilden (Flussschätzer)?

(d) Unter Verwendung des einfachen Strommodells $\frac{\psi_r^d(s)}{i_s^d(s)} = \frac{\widehat{M}}{1+s\widehat{T}_r}$ legen Sie einen Rotorflussregler aus! Hierbei sind $\widehat{M}$ und $\widehat{T}_r$ geschätzte Parameter der Koppelinduktivität M und der Rotorzeitkonstante $T_r = L_r/R_r$.

(e) Sehen Sie Schwierigkeiten bei der Implementierung der Rotorflussregelung bzw. der Reglerperformanz?

Aufgabe 4.3.5 (Stromregelung der ASM).
Ausgehend von der Modellierung der ASM im k-Koordinatensystem, gegeben durch

$$\left.\begin{array}{rrcll} \textit{Elekt. Statorkreis:} & \boldsymbol{u}_s^k(t) & = & R_s\boldsymbol{i}_s^k(t) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\psi}_s^k(t) + \omega_k\boldsymbol{J}\boldsymbol{\psi}_s^k & ,\boldsymbol{\psi}_s^k(0) = 0\ [\mathrm{Vs}] \\ \textit{Elekt. Rotorkreis:} & 0 & = & R_r\boldsymbol{i}_r^k(t) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\psi}_r^k(t) + (\omega_k - \omega_r)\boldsymbol{J}\boldsymbol{\psi}_r^k & ,\boldsymbol{\psi}_r^k(0) = 0\ [\mathrm{Vs}] \\ \textit{Flussverkettung:} & \boldsymbol{\psi}_s^k(t) & = & L_s\boldsymbol{i}_s^k(t) + M\boldsymbol{i}_r^k(t) & \\ & \boldsymbol{\psi}_r^k(t) & = & L_r\boldsymbol{i}_r^k(t) + M\boldsymbol{i}_s^k(t) & \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

sollen fluss- und momentenbildender Stromregler entworfen werden. Gehen Sie von exakter Rotorflussorientierung aus, d.h. $\psi_r^q = 0 = \dot{\psi}_r^q$!

(a) Bestimmen Sie aus (4.2) die Dynamik der fluss- bzw. momentenbildenden Stromkomponente, d.h. $\frac{d}{dt}\,i_s^d(t) = f^d(\dots)$ und $\frac{d}{dt}\,i_s^q(t) = f^q(\dots)$! Für eine verkürzte Darstellung führen Sie die Bezeichnung $\sigma = \left(1 - \frac{M^2}{L_sL_r}\right)$ (Blondel'scher Streukoeffizient) ein!

(b) Identifizieren Sie Kopplungs- und Störterme! Unter welchen Voraussetzungen können Sie diese kompensieren?

(c) Was gilt für die Dynamik(en) bei konstantem Fluss $\psi_r^d > 0$ ($\dot{\psi}_r^d = 0$)?

(d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $F_{S,\,i_s^d}(s) = \frac{i_s^d(s)}{u_s^d(s)}$ und $F_{S,\,i_s^q}(s) = \frac{i_s^q(s)}{u_s^q(s)}$ (ideale Entkopplung)!

(e) Bestimmen Sie Systemverstärkungen und Zeitkonstanten der Übertragungsfunktionen!

(f) Mithilfe der Optimierungstabelle legen Sie die Stromregler der fluss- und momentenbildenden Stromkomponenten aus! (Annahme: keine Messwertglättung und Umrichter als PT_1 modelliert mit Zeitkonstante T_{str} und Verstärkung V_{str})

Hinweis: Um Ihnen die Implementierung in Matlab/Simulink zu erleichtern, nutzen Sie die unter `http://www.cres.mse.tum.de/index.php?id=eof`zur Verfügung gestellten Dateien `ASM_Regelung.mdl` und `ASM_Regelung_Init.m` (siehe `ASM.zip`)!

Aufgabe 4.3.6 (Implementierung in Matlab/Simulink).
Laden Sie das Initialisierungsskript `ASM_Regelung_Init.m` *und öffnen Sie die Simulink-Vorlage* `ASM_Regelung.mdl`.

(a) Vervollständigen Sie den Signalflussplan der geregelten ASM in Abb. 4.4!

(b) Implementieren Sie entsprechend Abb. 4.4 und den vorangegangenen Aufgaben die Feldorientierte Regelung (FOR) der ASM in Matlab/Simulink! Bei der Implementierung der Stromregelkreise vernachlässigen Sie Kompensation der Kopplungs- und Störterme!

(c) Implementieren Sie die Steuerbedingung zur Generierung der Umlaufwinkels $\phi_k(t) = \int_0^t \omega_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ des k-Koordinatensystems (Essenz der FOR)!

Abbildung 4.4: *Signalflussplan der Feldorientierten Regelung (FOR; engl. field-oriented control (FOC)) der ASM.*

4.4 Implementierung

Mit dem Vorwissen aufgrund des Simulationsteils soll nun die ASM des Laboraufbaus geregelt werden. Das PWM-Verfahren wurde in der dSPACE DS1104 Karte und einem vorgefertigtem Block bereits implementiert.

> Hinweis: Um Ihnen die Implementierung in Matlab/Simulink zu erleichtern, nutzen Sie die unter `http://www.cres.mse.tum.de/index.php?id=eof` zur Verfügung gestellten Dateien `ASM_Implementierung.mdl` und `ASM_Implementierung_Init.m` (siehe `ASM.zip`)!

Aufgabe 4.4.1 (Grobe Arbeitsschritte)**.**

(a) Machen Sie sich mit dem Laboraufbau vertraut! Nutzen Sie hierzu die Handbücher von dSPACE und SEW.

(b) Ergänzen Sie die nötigen Daten in `ASM_Implementierung_Init.m` *schrittweise!*

(c) Implementieren Sie sukzessive die kaskadierten Regelkreisstrukturen aus der Simulation in `ASM_Implementierung.mdl`*!*

Kapitel 5

Projekt 4: Zwei-Massen-System

5.1 Problemstellung

Projekt 4 zielt darauf ab die erlernten Modellierungs- und Regelungsverfahren auf den möglichen Anwendungsfall einer elastischen Verbindung zwischen elektrischer Maschine (Antriebsmaschine) und Prozess (Arbeitsmaschine) zu erweitern. Für eine Zwei-Massen-System (ZMS) sollen

- Verfahren zur aktiven Dämpfung,
- Lastdrehzahlregelung und
- Zustandsregelung

entworfen, simuliert und implementiert werden. ()

Lernziele und -inhalte:

- Verstehen der Problematik einer elastischen Verbindung
- Analyse der Stabilität für PI-Regelung und Zustandsregelung
- Entwerfen, Implementieren und Bewerten der PI- und Zustandsdrehzahlregelung und
- (eventuell: Rapid-Prototyping mithilfe von Matlab/Simulink der Regelungsmethoden auf einem xPC-Realtime-Target-System)

5.2 Simulation

5.2.1 Modellbildung und Verhalten

In Abb. 5.1 ist ein schwingungsfähiges Zwei-Massen-System (ZMS) mit Aktorstörung u_D dargestellt. Eingang ist das Sollmoment $m_{M,\text{ref}}$ [Nm], das der Aktor mit Zeitkonstante T_{ers} [s] gestört durch u_D [Nm] in das Motormoment m_M [Nm] umsetzt. Θ_1 und Θ_2 $\left[\text{kgm}^2\right]$ stellen Motor- und Arbeitsmaschinenträgheit dar. Ebenso entsprechen ω_1 und ω_2 $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ der Motor- und Arbeitsmaschinenwinkelgeschwindigkeit. g_r [1] ist die Getriebeübersetzung. Die mechanische Kopplung (Welle; engl. shaft) besitzt Dämpfung d_S [Nms/rad] und Steifigkeit c_S [Nm/rad]. In der Welle entsteht der Verdrehwinkel $\phi_S(t) = \int_0^t \omega_1(\tau)/g_r - \omega_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ [rad] mit Verdrehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\phi_S} = \omega_S = \omega_1/g_r - \omega_2$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ und das Wellenmoment

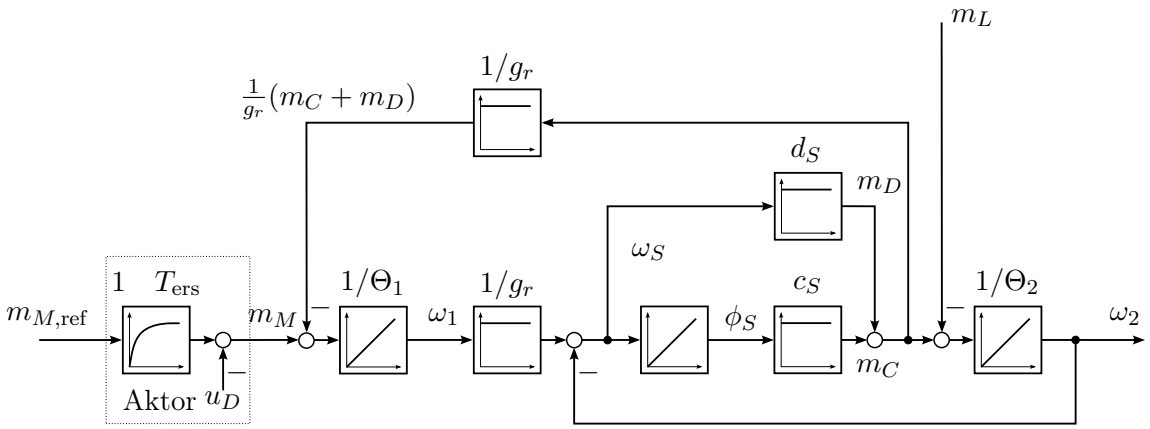


Abbildung 5.1: *Signalflussplan eines schwingungsfähigen Zwei-Massen-Systems (ZMS) mit Aktorstörung*

$m_C + m_D = d_S\omega_S + c_S\phi_S$ [Nm]. Auf die Arbeitsmaschine (z.B. Farbauftragswalze) wirkt das Lastmoment m_L [Nm].

Als direkte **Messgrößen** sollen Ihnen im Folgenden, die Arbeitsmaschinen-Winkelgeschwindigkeit $\omega_2(t)$ zur Verfügung stehen.

Aufgabe 5.2.1 (Modellierung des ZMS)**.**

(a) Warum ist das Motormoment m_M durch u_D gestört?

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $F_{ZMS}(s) = \frac{\omega_2(s)}{m_M(s)}$!

(c) Interpretieren Sie die Anteile der Übertragungsfunktion $F_{ZMS}(s)$! Teilen Sie hierzu die Übertragungsfunktion $F_{ZMS}(s)$ in das Produkt $F_{starr}(s) \cdot F_{elast}(s)$ auf! (Hinweis: $F_{starr}(s)$ entspricht einem gewichteten Integrator!)

(d) Was passiert für $c_S \to \infty$? Was für eine Kopplung liegt vor?

(e) Vergleichen Sie den schwingungsfähigen Anteil $F_{elast}(s)$ mit einem Standard PT_2, d.h. mit $F_{PT_2}(s) = \frac{1}{1+s\frac{2D}{\omega_0}+s^2\frac{1}{\omega_0^2}}$ und bestimmen Sie Dämpfungskoeffizient D und Eigenfrequenz ω_0 in Abhängigkeit der Parameter Θ_1, Θ_2, c_S, d_S und g_r!

(f) Bestimmen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $F_{S,\omega_2}(s) = \frac{\omega_2(s)}{m_{M,\text{ref}}(s)}$!

> Hinweis: Um Ihnen die Implementierung in Matlab/Simulink zu erleichtern, nutzen Sie die unter `http://www.cres.mse.tum.de/index.php?id=eof` zur Verfügung gestellten Dateien `ZMS_Simulation.mdl` und `ZMS_Simulation_Init.m` (siehe `ZMS.zip`)!

Aufgabe 5.2.2 (Implementierung des ZMS in Matlab/Simulink)**.**
Laden Sie das Initialisierungsskript `ZMS_Simulation_Init.m` *und öffnen Sie die Simulink-Vorlage* `ZMS_Simulation.mdl`*.*

(a) Implementieren Sie das Zwei-Massen-System entsprechend Abb. 5.1 in das vorgegebene Subsystem mit den Eingängen $m_{M,\text{ref}}$, u_D und m_L und dem Ausgang ω_2!

(b) *Für* $m_{M,\mathrm{ref}}(t) = m_L(t) = 0$ [Nm] *regen Sie das ZMS mit einem Sprung* $u_D(t) = 20$ [Nm] $\sigma(t - 1\,[\mathrm{s}])$ *an! Beobachten Sie* ω_1, ω_2 *und* ϕ_S*!*

(c) *Für* $m_{M,\mathrm{ref}}(t) = u_D(t) = 0$ [Nm] *regen Sie das ZMS mit einem Lastsprung* $m_L(t) = 20$ [Nm] $\sigma(t - 1\,[\mathrm{s}])$ *an! Beobachten Sie* ω_1, ω_2 *und* ϕ_S*!*

(d) *Bestimmen Sie* D *und* ω_0 *des implementierten ZMS! Stimmen Ihre Berechnungen mit den Simulationsergebnissen in (b) und (c) überein?*

5.2.2 Regelung

Aufgabe 5.2.3 (Regelung des ZMS)**.**

(a) *Ergänzen Sie Abb. 5.1 um einen Drehzahlregelkreis mit Regler* $F_{R,\omega_2}(s) = \frac{m_{M,\mathrm{ref}}(s)}{\omega_{2,\mathrm{ref}}(s) - \omega_2(s)}$ *und Drehzahlsollwert* $\omega_{2,\mathrm{ref}}$*!*

(b) *Welche Strecke müssten Sie für* $c_S \to \infty$ *regeln? Stellen Sie die (vereinfachte) Übertragungsfunktion* $F'_{S,\omega_2}(s) = \frac{\omega_2(s)}{m_{M,\mathrm{ref}}(s)}$ *für diesen Fall auf! (Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 4.1 (f)!)*

(c) *Legen Sie mithilfe der Optimierungstabelle den Regler* $F_{R,\omega_2}(s)$ *für die Strecke* $F'_{S,\omega_2}(s)$ *aus! Welches Optimierungskritierium wenden Sie an? Warum?*

(d) *Erzeugen Sie mit Matlab/Simulink das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises* $F_0(s) = F_{R,\omega_2}(s)F'_{S,\omega_2}(s)$*!*

(e) *Erzeugen Sie mit Matlab/Simulink das Bode-Diagramm des elastischen Anteils* $F_{elast}(s)$ *des ZMS!*

(f) *Addieren Sie nun graphisch die beiden Bode-Diagramme von* $F_0(s)$ *und* $F_{elast}(s)$ *in Abb. 5.2 zum Bode-Diagramm der Serienschaltung* $F_0(s) \cdot F_{elast}(s)$*!*

(g) *Ist der geschlossene Regelkreis des schwingungsfähigen ZMS stabil (d.h.* $c_S \ll \infty$*)? (Hinweis: Gibt es eine Phasenreserve* ϕ_d *bei der Amplitudendurchtrittsfrequenz* ω_d*?)*

(h) *Erzeugen Sie mit Matlab/Simulink das Bode-Diagramm der Serienschaltung* $F_0(s) \cdot F_{elast}(s)$*! Überprüfen Sie die Aussage von Aufgabe 4.3 (g)!*

Aufgabe 5.2.4 (Zustandsregelung des ZMS)**.**
Ihre Anlage habe eine sehr schnelle Momentenerzeugung, d.h. $T_{\mathrm{ers}} = 0$*. Des Weiteren steht Ihnen neben* ω_2 *auch* ω_1 *als Messgröße zur Verfügung. Sie möchten eine Zustandsregler auslegen.*

(a) *Wie viele und welche Zustände* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ *besitzt das ZMS in Abb. 5.1 für* $T_{\mathrm{ers}} = 0$*?*

(b) *Stellen Sie das Zustandsraummodell* $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), u_D(t), m_L(t), m_{M,\mathrm{ref}}(t)\big)$ *des ZMS mithilfe des Signalflussplans in Abb. 5.1 für* $T_{\mathrm{ers}} = 0$ *auf!*

(c) *Wie können Sie den Verdrehwinkel* ϕ_S *aus den Messgrößen* ω_1 *und* ω_2 *nachbilden?*

(d) *Wie sieht ein lineares Zustandsregelgesetz für das ZMS aus?*
(Hinweis: $m_{M,\mathrm{ref}} = m_M = \ldots^{\top} \boldsymbol{x}$*!)*

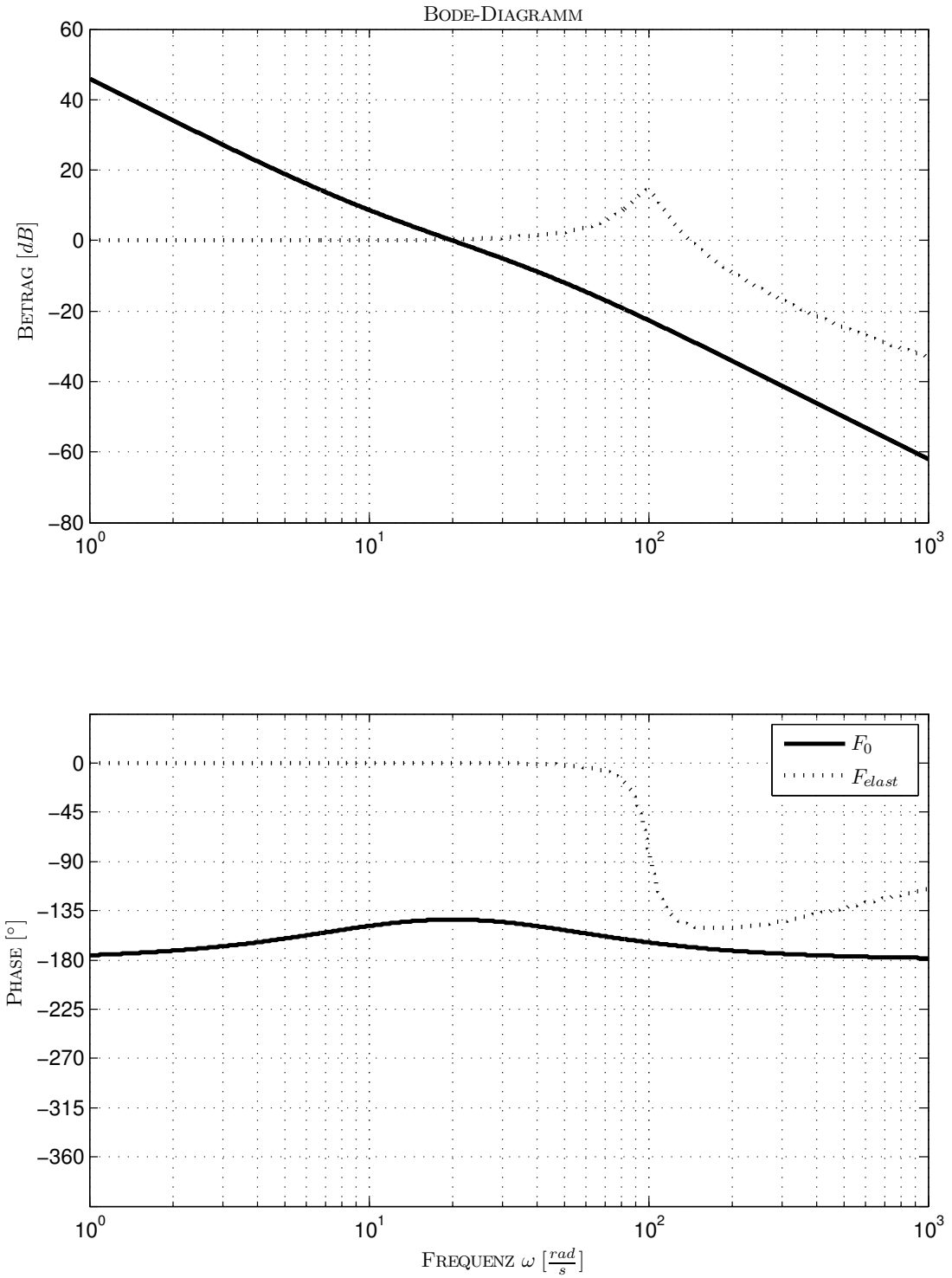


Abbildung 5.2: *Bode-Diagramme des offenen Regelkreises* $F_0(s) = F_{R,\omega_2}(s)F'_{S,\omega_2}(s)$ *(für* $c_S \to \infty$*) und des schwingungsfähigen (elastischen) Anteils* $F_{elast}(s)$*.*

(e) *Berechnen Sie die Systemmatrix $\boldsymbol{A}_{RK}$ des geschlossenen Regelkreises!*
(Hinweis: Setzen Sie Ihren Zustandsregler in das Zustandsraummodell ein)

(f) *Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung*

$$\chi_{\boldsymbol{A}_{RK}}(s) := \det(s\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}_{RK}), \qquad \textit{mit} \qquad \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}!$$

(Hinweis: Nutzen Sie Matlab zur symbolischen Berechnung. Verwenden Sie hierzu den Befehl `syms` *um symbolische Variablen zu definieren, z.B.* `syms c_S d_S Theta1 ....`*)*

(g) *Legen Sie mithilfe des Wunschpolynoms*

$$\chi_{Wunsch}(s) = \left(\frac{1}{T} + s\right)\left(\frac{1}{2T} + s\right)\left(\frac{1}{3T} + s\right) = \frac{1}{6\,T^3} + \frac{1}{T^2}\,s + \frac{11}{6T}\,s^2 + s^3$$

(Polplatzierung mit $T > 0$ [s]) Ihren Zustandsregler aus Aufgabe 4.4 (d) aus! Worauf müssen Sie bei der Wahl von T achten?

(h) *Welche Vorteile hat eine Zustandsregelung im Vergleich zur bisherigen Reglerauslegung mithilfe des Bodediagrams?*

(i) *Warum müssen Sie die Arbeitsmaschinen-Solldrehzahl $\omega_{2,\mathrm{ref}}$ über einen Faktor K_V anpassen? Berechnen Sie den Faktor K_V in Abhängigkeit des Zustandsraummodells des geschlossen Regelkreises! (Ergebnis: $K_V = \frac{-1}{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{A}_{RK}^{-1}\boldsymbol{b}}$)*

Aufgabe 5.2.5 (Implementierung der Regelung des ZMS in Matlab/Simulink)**.** *Laden Sie das Initialisierungsskript* `ZMS_Simulation_Init.m` *und öffnen Sie die Simulink-Vorlage* `ZMS_Simulation.mdl` *(mit dem Modell aus Aufgabe 4.2). Wählen Sie folgende Anregungssignale*

$$\begin{aligned} \omega_{2,\mathrm{ref}}(t) &= 10\,\sigma(t - 1\ [\mathrm{s}])\ [\mathrm{rad/s}]\,, \\ u_D(t) &= 3\,\sigma(t - 10\ [\mathrm{s}])\ [\mathrm{Nm}] \qquad \textit{und} \\ m_L(t) &= 20\,\sigma(t - 20\ [\mathrm{s}])\ [\mathrm{Nm}]\,. \end{aligned}$$

(a) *Implementieren Sie die Drehzahlregelung entsprechend Aufgabe 4.3!*

(b) *Implementieren Sie die Zustandsregelung entsprechend Aufgabe 4.4!*
(Hinweis: Nutzen Sie den Matlab-Befehl `place`*! Es gilt $T = 0.05$ [s] und $T_{\mathrm{ers}} = 0.005$ [s].)*

Literaturverzeichnis

[1] Biggs, John ; Tang, Catherine: *Teaching for Quality Learning at University.* New York : McGraw-Hill Education, 2009

[2] Binder, Andreas: *Elektrische Maschinen und Antriebe – Grundlagen, Betriebsverhalten.* Berlin : Springer-Verlag, 2012. – ISBN 978-3-540-71850-5

[3] Dirscherl, Christian ; Hackl, Christoph ; Schechner, Korbinian: Modellierung und Regelung von modernen Windkraftanlagen: Eine Einführung. In: Schröder, Dierk (Hrsg.): *Elektrische Antriebe – Regelung von Antriebssystemen.* Springer-Verlag, 2014 (to be published in the 4. edition), S. 1505–1578

[4] Elektrotechnik & Informationstechnik Fakultät für: Aggregierter Vorlesungsbericht Sommersemester 2012 / TUM. München, 2012. – Bericht. – URL http://www.ei.tum.de/fileadmin/tueifei/www/Evaluation/Aggregierter_Vorlesungsbericht_SoSe_2012_der_Fakultaet_EI.pdf

[5] Elektrotechnik & Informationstechnik Fakultät für: Aggregierter Vorlesungsbericht Wintersemester 2012/2013 / TUM. München, 2013. – Bericht. – URL http://www.ei.tum.de/fileadmin/tueifei/www/Evaluation/Aggregierter_Vorlesungsbericht_WiSe_2012_13.pdf

[6] Hattie, J.: *Visible Learning: A Synthesis of over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement.* Routledge, 2009

[7] Hinrichsen, D. ; Pritchard, A.J.: *Mathematical Systems Theory I — Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness.* Berlin : Springer-Verlag, 2005 (Texts in Applied Mathematics 48)

[8] Kories, Ralph ; Schmidt-Walter, Heinz: *Taschenbuch der Elektrotechnik.* Verlag Harri Deutsch, 1998

[9] Lehre Hochschulreferat Studium und: Online-Umfrage zu den Studienbedingungen des Bachelor-Studiengangs an der Faultät für Elektrotechnik & Informationstechnik / TUM. München, 2012. – Online-Umfrage. – URL http://www.ei.tum.de/fileadmin/tueifei/www/Evaluation/Ergebnisbericht_Studiengangsbefragung.pdf

[10] Mertens, Konrad: *Photovoltaik.* Hanser Verlag, 2013

[11] Müller, F. H.: *Förderung der Lernmotivation in der Hochschule.* S. 31–43. In: *Förderung von Kompetenzen in der Hochschullehre.* Kröning : Asanger, 2007

[12] Müller, Germar ; Ponick, Bernd: *Grundlagen elektrischer Maschinen.* New York : John Wiley & Sons, 2012. – ISBN 978-3-527-66097-1

[13] Palekcic, M. ; Müller, F.H. ; Radeka, I. ; Rogic, A.M.: Studieren vor und nach Bologna: Ein Vergleich der selbstbestimmten Lernmotivation im Studium. In: *76. Tagung der Arbeitsgruppe für Empirische Päagogische Forschung (AEPF): Baustelle Lehrerbildung.* Klagenfurt, Austria, 2011

[14] Prenzel, Manfred: *Bedingungen für selbstbestimmt motiviertes und interessiertes Lernen im Studium.* S. 11–22. In: *Lehr- und Lernprobleme im Studium - Bedingungen und Veränderungsmöglichkeiten.* Bern : Huber, 1996

[15] Quaschning, Volker: *Regenerative Energiesysteme.* Hanser Verlag, 2011

[16] Råde, L. ; Westergren, B. ; Vachenauer, P.: *Springers mathematische Formeln: Taschenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Informatiker, Wirtschaftswissenschaftler.* 3. Springer-Verlag, 2000

[17] Schröder, Dierk: *Elektrische Antriebe — Grundlagen (3.,erw. Auflage).* Berlin : Springer-Verlag, 2007

[18] Schröder, Dierk: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen (3., bearb. Auflage).* Berlin : Springer-Verlag, 2009

[19] Schröder, Dierk: *Leistungselektronische Schaltungen: Funktion, Auslegung und Anwendung.* Berlin, Heidelberg : Springer DE, 2012

[20] Tippelt, Rudolf: *Vom projektorientierten zum problembasierten und situierten Lernen - Neues von der Hochschuldidaktik.* S. 137–155. In: *Entwicklungslinien der Hochschuldidaktik.* Berlin : Logos, 2007

[21] Winteler, A.: *Professionell lehren und lernen.* Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 2011

Teil III

Anhänge

Anhang A

Allgemeine Grundlagen

A.1 Trigonometrische Formeln (siehe [16])

Im Folgenden gelte $x, y \in \mathbb{R}$ (bei entsprechender Einschränkung des Bereiches falls notwendig).

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \tag{A.1}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \tag{A.2}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} \tag{A.3}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big) \tag{A.4}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big) \tag{A.5}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big) \tag{A.6}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{A.7}$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{A.8}$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{A.9}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \tag{A.10}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) & , x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan(x) & , x < 0. \end{cases} \tag{A.11}$$

$$\arctan(-x) = -\arctan(x) \tag{A.12}$$

$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y = \text{bel.} \;,\; x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0 \;,\; x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0 \;,\; x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & y > 0 \;,\; x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0 \;,\; x = 0 \\ \text{undefiniert} & y = 0 \;,\; x = 0 \end{cases} \tag{A.13}$$

Folgende Funktionswerte $\arctan(x)$ ergeben sich für ausgewählte Argumente x:

x	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\arctan(x)$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	0

Tabelle A.1: *Ausgewählte Argumente für und Funktionswerte von* $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

x [°]	0 [0°]	$\frac{\pi}{6}$ [30°]	$\frac{\pi}{4}$ [45°]	$\frac{\pi}{3}$ [60°]	$\frac{\pi}{2}$ [90°]	$\frac{2\pi}{3}$ [120°]	$\frac{3\pi}{4}$ [135°]	π [180°]	$\frac{3\pi}{2}$ [270°]
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\pm\infty$

Tabelle A.2: *Ausgewählte Argumente für und Funktionswerte von* $\cos$, $\sin$, $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A.2 Energieeinheiten und Umrechnungsfaktoren

Energieträger	Energiegehalt	Anmerkung
1 [kg] Steinkohle	8.14 [kWh]	–
1 [kg] Rohöl	11.63 [kWh]	Benzin: 8.7 [kWh/Liter]; Diesel: 9.8 [kWh/Liter]
1 $[m^3]$ Erdgas	8.82 [kWh]	–
1 [kg] Holz	4.3 [kWh]	(bei 15% Feuchte)

Tabelle A.3: *Umrechnungsfaktoren verschiedener Energieträger (siehe [10, Tab. 1.2]).*

	[kJ]	[kcal]	[kWh]	[kg] SKE	[kg] RÖE	$[m^3$ Erdgas$]$
1 [kJ] = 1000 [Ws]	**1**	0.2388	$\frac{1}{3600}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$
1 [kcal]	4.1868	**1**	$1.163 \cdot 10^{-3}$	$1.43 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
1 [kWh]	3600	860	**1**	0.123	0.086	0.113
1 [kg] SKE	29308	7000	8.14	**1**	0.7	0.923
1 [kg] RÖE	41868	10000	11.63	1.428	**1**	1.319
1 $[m^3$ Erdgas$]$	31736	7580	8.816	1.083	0.758	**1**

Tabelle A.4: *Umrechnungsfaktoren zwischen verschiedenen Energieeinheiten (siehe [15, Tab. 1.1]) mit den Abkürzungen* [kJ]*: Kilojoule,* [Ws]*: Wattsekunde,* [kcal]*: Kilokalorie,* [kWh]*: Kilowattstunde,* [SKE]*: Steinkohleeinheit,* [RE]*: Rohöleinheit und* $[m^3]$*: Kubikmeter (Volumen).*

Vorsatz	Symbol	Wert		Vorsatz	Symbol	Wert	
Milli	m	10^{-3}	(Tausendstel)	Kilo	k	10^{3}	(Tausend)
Mikro	μ	10^{-6}	(Millionstel)	Mega	M	10^{6}	(Million)
Nano	n	10^{-9}	(Milliardstel)	Giga	G	10^{9}	(Milliarde)
Piko	p	10^{-12}	(Billionstel)	Tera	T	10^{12}	(Billion)
Femto	f	10^{-15}	(Billiardstel)	Peta	P	10^{15}	(Billiarde)
Atto	a	10^{-18}	(Trillionstel)	Exa	E	10^{18}	(Trillion)

Tabelle A.5: *Vorsätze, Symbole und Faktoren.*

A.3 Stromsysteme (siehe [8])

Im Folgenden sei $t_0 \geq 0$ [s] ein beliebiger Zeitpunkt und $x\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ein periodisches Signal mit Periodendauer $T > 0$ [s] (d.h. $x(t) = x(t+T)$ für alle $t \geq 0$) und Amplitude $\hat{x} > 0$.

- **Gleichwert** oder **arithmetischer Mittelwert** (zeitlich gleitend $\overline{X}(t_0)$ bzw. für T-periodische Signale $\overline{X}$):

$$\forall t_0 \geq T: \qquad \overline{X}(t_0) := \frac{1}{T}\int_{t_0-T}^{t_0} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{X} := \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{A.14}$$

- **Gleichrichtwert** (zeitlich gleitend $\overline{X}_{\mathrm{DC}}(t_0)$ bzw. für T-periodische Signale $\overline{X}_{\mathrm{DC}}$):

$$\forall t_0 \geq T: \qquad \overline{X}_{\mathrm{DC}}(t_0) := \frac{1}{T}\int_{t_0-T}^{t_0} |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{X}_{\mathrm{DC}} := \frac{1}{T}\int_{0}^{T} |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \tag{A.15}$$

  (für sinus- oder cosinusförmige Signale gilt $\overline{X}_{\mathrm{DC}} = \frac{2}{\pi}\hat{x} \approx 0.637\hat{x}$)

- **Effektivwert** (engl. root-mean-square/RMS value) oder **quadratischer Mittelwert** (zeitlich gleitend $X_{\mathrm{eff}}(t_0)$ bzw. für T-periodische Signale X_{eff}):

$$\forall t_0 \geq T: \qquad X_{\mathrm{eff}}(t_0) := \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0-T}^{t_0} x(\tau)^2\,\mathrm{d}\tau} \qquad \text{bzw.} \qquad X_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(\tau)^2\,\mathrm{d}\tau} \tag{A.16}$$

A.3.1 Wechselstrom

Wechselstromsystem mit sinusförmiger Spannung u [V] und sinusförmigem Strom i [A]:

$$\left.\begin{aligned} &u(t) = \hat{u}\sin\left(\omega t + \varphi_u\right) \quad \text{und} \quad i(t) = \hat{\imath}\sin\left(\omega t + \varphi_i\right) \\ &\text{wobei } \hat{u} > 0\ [\mathrm{V}]\,,\ \hat{\imath} > 0\ [\mathrm{A}]\,,\ \varphi_u \in \mathbb{R}\ [\mathrm{rad}]\,,\ \varphi_i \in \mathbb{R}\ [\mathrm{rad}]\ \text{und}\ \omega > 0\ [\mathrm{rad/s}]\,. \end{aligned}\right\} \tag{A.17}$$

Für **sinus- oder cosinusförmige Signale** wie in (A.17) gilt:

- **Periodizität** mit Periode:

$$T := \frac{2\pi}{\omega}\ [\mathrm{s}] \tag{A.18}$$

- **Phasenverschiebung** zwischen Spannung und Strom:

$$\varphi := \varphi_u - \varphi_i \text{ [rad]} \tag{A.19}$$

- **Effektivwert**:

$$X_{\text{eff}} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} \approx 0.707\hat{x} \qquad \text{mit} \qquad X, x \in \{u,\, i\} \tag{A.20}$$

- **Momentanleistung**:

$$\forall t \geq 0\colon \qquad p_{\sim}(t) := u(t)i(t) \text{ [W]} \tag{A.21}$$

- **Mittlere Leistung** über Periode T wie in (A.18):

$$\forall t \geq T\colon \qquad P_{\sim}(t) := \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} p_{\sim}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{A.22}$$

- **Wirkleistung** für Phasenverschiebung φ wie in (A.19):

$$P_{\sim} := S_{\sim}\cos(\varphi) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) \text{ [W]} \tag{A.23}$$

- **Blindleistung** für Phasenverschiebung φ wie in (A.19):

$$Q_{\sim} := S_{\sim}\sin(\varphi) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi) \text{ [var]} \tag{A.24}$$

- **Scheinleistung**:

$$S_{\sim} := U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \sqrt{P_{\sim}^2 + Q_{\sim}^2} \text{ [VA]} \tag{A.25}$$

A.3.2 Drehstrom (symmetrisch)

Drehstromsystem mit sinusförmigen Strangspannungen $\boldsymbol{u}^{abc}$ $[\mathrm{V}]^3$ und -strömen $\boldsymbol{i}^{abc}$ $[\mathrm{A}]^3$:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}^{abc}(t) := \begin{pmatrix} u^a(t) \\ u^b(t) \\ u^c(t) \end{pmatrix} = \hat{u} \begin{pmatrix} \sin\left(\omega t + \varphi_u\right) \\ \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{4}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \text{ und} \\
&\boldsymbol{i}^{abc}(t) := \begin{pmatrix} i^a(t) \\ i^b(t) \\ i^c(t) \end{pmatrix} = \hat{\imath} \begin{pmatrix} \sin\left(\omega t + \varphi_i\right) \\ \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{4}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \\
&\text{wobei } \hat{u} > 0 \text{ [V]}\,,\ \hat{\imath} > 0 \text{ [A]}\,,\ \varphi_u \in \mathbb{R} \text{ [rad]}\,,\ \varphi_i \in \mathbb{R} \text{ [rad]} \text{ und } \omega > 0 \text{ [rad/s]}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{A.26}$$

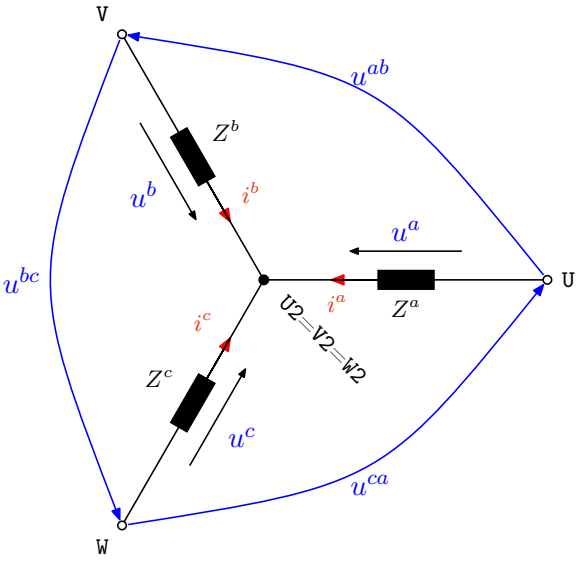
Für ein symmetrisches Drehstromsystem (A.26) gilt abhängig von der Verschaltung (siehe Abb. A.1):

- **Periodizität** (jedes Stranges) mit Periode:

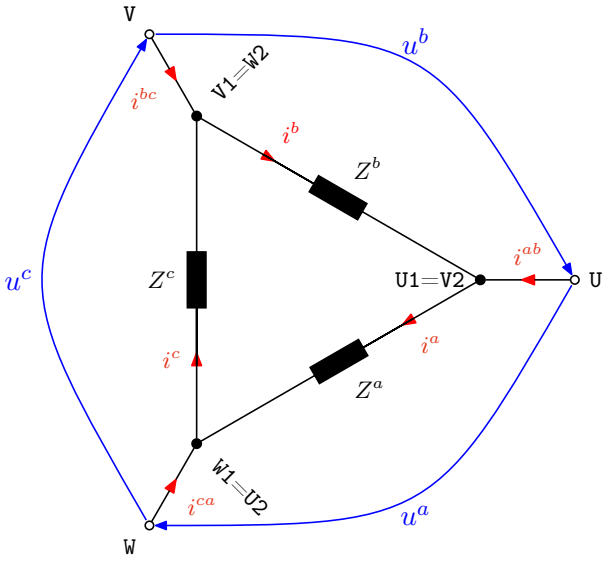
$$T := \frac{2\pi}{\omega} \text{ [s]} \tag{A.27}$$

- **Phasenverschiebung** zwischen Spannung und Strom (gilt für jeden Strang):

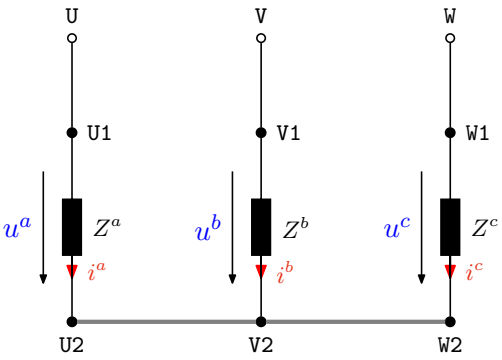
$$\varphi := \varphi_u - \varphi_i \text{ [rad]} \tag{A.28}$$



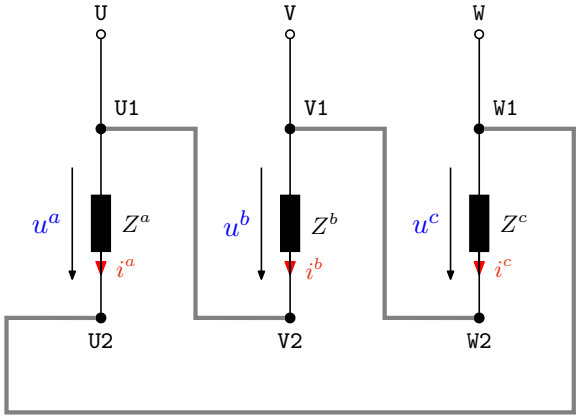
(a) ***Sternschaltung*** *(Symbol $\curlyvee$) mit verketteten Spannungen $u^{\text{verk}} \in \{u^{ab}, u^{bc}, u^{ca}\}$, Strangspannungen $u^{\text{str}} \in \{u^a, u^b, u^c\}$ (über Z^a, Z^b, Z^c) und Strangströmen $i^{\text{str}} \in \{i^a, i^b, i^c\}$.*



(b) ***Dreieckschaltung*** *(Symbol $\triangle$) mit Strangspannungen $u^{\text{str}} \in \{u^a, u^b, u^c\}$ (über Z^a, Z^b, Z^c), Strangströmen $i^{\text{str}} \in \{i^a, i^b, i^c\}$ und verketteten Strömen $i^{\text{str}} \in \{i^{ab}, i^{bc}, i^{ca}\}$.*



(c) ——***Verdrahtung zu Sternschaltung (rechtslauf)*** *der Wicklungen Z^a, Z^b, Z^c mit Wicklungsanschlüssen* `U1, U2, V1, V2` *und* `W1, W2`*.*



(d) ——***Verdrahtung zu Dreieckschaltung (rechtslauf)*** *der Wicklungen Z^a, Z^b, Z^c mit Wicklungsanschlüssen* `U1, U2, V1, V2` *und* `W1, W2`*.*

Abbildung A.1: *Stern- und Dreieckschaltung mit Anschlussklemmen* `U, V, W` *und Wicklungen Z^a, Z^b, Z^c (Strangimpedanzen).*

- **Effektivwert** in Stern- bzw. Dreieckschaltung:

$$X_{\text{eff}}^{\text{str}} \overset{(A.16)}{=} \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} \text{ und } X_{\text{eff}}^{\text{verk}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{x} \Leftrightarrow X_{\text{eff}}^{\text{str}} = \frac{X_{\text{eff}}^{\text{verk}}}{\sqrt{3}}, \qquad X, x \in \{u, i\} \tag{A.29}$$

- **Momentanleistung**:

$$\forall t \geq 0\colon \qquad p_{3\sim}(t) := \boldsymbol{u}^{abc}(t)^{\top}\boldsymbol{i}^{abc}(t) = u^a(t)i^a(t) + u^b(t)i^b(t) + u^c(t)i^c(t) \text{ [W]} \tag{A.30}$$

- **Mittlere Leistung** über Periode T wie in (A.27)

$$\forall t \geq T\colon \qquad P_{3\sim}(t) := \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} p_{3\sim}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{A.31}$$

- **Wirkleistung** für Phasenverschiebung φ wie in (A.28):

$$P_{3\sim} := S_{3\sim}\cos(\varphi) = 3\,U_{\text{eff}}^{\text{str}} I_{\text{eff}}^{\text{str}} \cos(\varphi) \text{ [W]} \tag{A.32}$$

- **Blindleistung** für Phasenverschiebung φ wie in (A.28):

$$Q_{3\sim} := S_{3\sim}\sin(\varphi) = 3\,U_{\text{eff}}^{\text{str}} I_{\text{eff}}^{\text{str}} \sin(\varphi) \text{ [var]} \tag{A.33}$$

- **Scheinleistung**

$$\left.\begin{array}{lll} S_{3\sim} & := & \sqrt{P_{3\sim}^2 + Q_{3\sim}^2} \text{ [VA]} \\ & \overset{(A.32),(A.33)}{=} & 3\,U_{\text{eff}}^{\text{str}} I_{\text{eff}}^{\text{str}} \\ & \overset{(A.29)}{=} & \sqrt{3}\,U_{\text{eff}}^{\text{verk}} I_{\text{eff}}^{\text{str}} \overset{(A.29)}{=} \sqrt{3}\,U_{\text{eff}}^{\text{str}} I_{\text{eff}}^{\text{verk}} \\ & \overset{(A.29)}{=} & U_{\text{eff}}^{\text{verk}} I_{\text{eff}}^{\text{verk}} \end{array}\right\} \tag{A.34}$$

Anhang B

Grundlagen der Gleichstrommaschine

B.1 Danksagung

Abschnitte B.2 und B.3 wurden zusammen mit Dipl.-Ing. Julien Cordier (Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik) er- und überarbeitet. Insbesondere die Abschnitte B.2.2.2, B.2.3.1 und B.2.3.2 wurden von Herrn Cordier erarbeitet und zur Verfügung gestellt. Hierfür möchte sich der Autor ganz herzlich bedanken.

B.2 Modellbildung

Um die Regelung zu entwerfen, muss ein mathematisches Modell der Regelstrecke vorliegen. Daher werden im folgenden Kapitel zunächst die einzelnen Komponenten des Regelkreises vorgestellt und geeignet modelliert.

B.2.1 Vierquadrantensteller

B.2.1.1 Funktionsweise

Der *Pulssteller* gehört zu den Gleichspannungswandlern und liefert, ausgehend von einer festen Eingangspannung u_{DC}, eine einstellbare, pulsierende Ausgangsspannung u_A. Im Hinblick auf die möglichen Spannungs- und Strompolaritäten wird zwischen Ein-Quadranten- und Mehrquadranten-Pulsstellern unterschieden. Im weiteren Verlauf wird ein Vierquadranten-Pulssteller betrachtet, welcher sowohl positive, als auch negative Ausgangsspannungen bereitstellen und den Strom bidirektional führen kann (Abb. B.1).

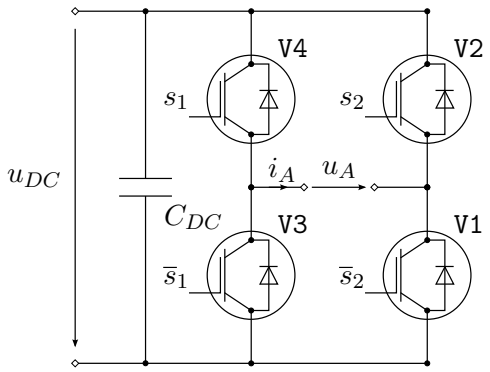
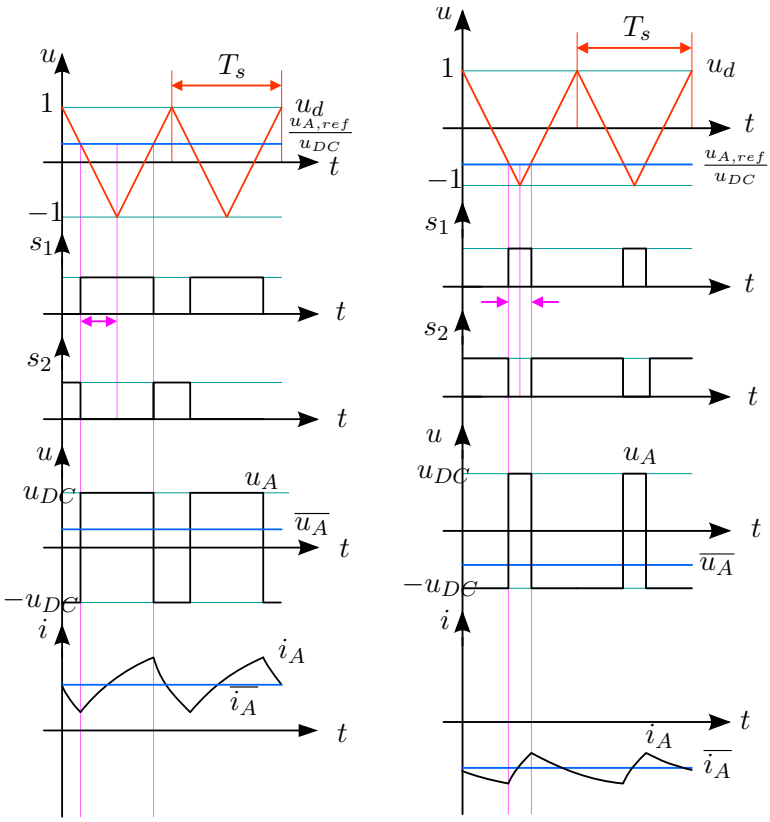


Abbildung B.1: *Prinzipschaltplan eines Vierquadrantenstellers.*



(a) $d > 0,5$ *bzw.* $\overline{u_A} > 0$. (b) $d < 0,5$ *bzw.* $\overline{u_A} < 0$.

Abbildung B.2: *Funktionsprinzip der Pulsbreitenmodulation*

Die in Abb. B.1 dargestellten Schaltelemente `V1` bis `V4` (IGBT-Module mit integrierter Freilaufdiode) werden als ideelle Schalter angenommen, die über die binären Ansteuerungssignale s_1 bis s_2 beliebig geschlossen (kurz s_x, $x \in \{1..2\}$) oder geöffnet (kurz $\neg s_x$, $x \in \{1..2\}$) werden können. Ist in einem der beiden Halbbrücken ein Schalter geschlossen, muss der andere geöffnet sein, um einen Kurzschluss der Eingangsspannung (*Zwischenkreisspannung*) u_{DC} auszuschließen. Somit ergeben sich folgende logische Zusammenhänge zwischen Steuersignalen und der Ausgangsspannung:

$$\left.\begin{array}{lll} s_1 = \overline{s}_2 = 1 \ \wedge \ s_2 = \overline{s}_1 = 0 & \xRightarrow{\texttt{V4 \& V1 geschlossen}} & u_A = u_{\mathrm{DC}} \\ s_1 = \overline{s}_2 = 0 \ \wedge \ s_2 = \overline{s}_1 = 1 & \xRightarrow{\texttt{V3 \& V2 geschlossen}} & u_A = -u_{\mathrm{DC}} \\ s_1 = s_2 = 1 \ \wedge \ \overline{s}_1 = \overline{s}_2 = 0 & \xRightarrow{\texttt{V4 \& V2 geschlossen}} & u_A = 0 \ [\mathrm{V}] \\ s_1 = s_2 = 0 \ \wedge \ \overline{s}_1 = \overline{s}_2 = 1 & \xRightarrow{\texttt{V3 \& V1 geschlossen}} & u_A = 0 \ [\mathrm{V}] \end{array}\right\} \quad \text{(B.1)}$$

Die Signale $\overline{s}_1$ bzw. $\overline{s}_2$ werden durch logische Negation der Signale s_1 bzw. s_2 generiert.

B.2.1.2 Nachbildung von wertkontinuierlichen Spannungen

Wie aus (B.1) hervorgeht, kann der Pulssteller lediglich 3 diskrete Spannungswerte an dessen Ausgangsklemmen bereitstellen. Durch Umschalten zwischen den drei möglichen Zuständen lassen sich jedoch mittlere Spannungswerte im gesamten Intervall $[-u_{DC}; u_{DC}]$ erzeugen. Dieses Verhalten wird erzielt, wenn die Steuersignale s_1 und s_3 durch z. B. Pulsbreitenmodulation (PWM) generiert werden.

Das Prinzip der PWM ist in Abb. B.2 erläutert, wobei folgende Symbole benutzt wurden:

$u_{A,ref}$	Spannungssollwert
u_d	Trägersignal
T_s	Periode des Trägersignals
T_{on}	Einschaltdauer des Schalters `S1`
u_A	Augenblickswert der Ausgangsspannung

Ferner entspricht $\overline{u_A}$ dem gleitenden Mittelwert der Ausgangsspannung über eine Trägerperiode:

$$\overline{u_A}(t) = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^{t} u_A(t')\,\mathrm{d}t'$$

Das binäre Signal s_1 wird durch Vergleich des Spannungssollwerts $u_{A,\mathrm{ref}}$ mit dem Referenzsignal u_d (*Trägersignal*) gemäß folgendem Gesetz bestimmt:

$$s_1 = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \frac{u_{A,\mathrm{ref}}}{u_{DC}} \geq u_d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{B.2}$$

Das Tastverhältnis (engl. *duty cycle*) d des Signals s_1 lautet somit:

$$d = \frac{T_{on}}{T_s} = \frac{T_{on}/2}{T_s/2} = \frac{1 + \frac{u_{A,\mathrm{ref}}}{u_{DC}}}{2} \tag{B.3}$$

Zur Vermeidung eines gleichzeitigen Einschaltens von `S1` und `S2` erfolgt die Ansteuerung von `S2` über das Signal $s_2 = \neg s_1$. Werden $s_3 = s_2 = \neg s_1$ und $s_4 = \neg s_3 = s_1$ gewählt, kann u_A laut (B.1) die Werte u_{DC} und $-u_{DC}$ annehmen. Dies hat den Vorteil, dass lediglich ein Signal zur Ansteuerung des Pulsstellers genügt. Durch Variieren des Tastverhältnisses im Intervall $[0; 1]$ können Spannungsmittelwerte $\overline{u_A}$ im gesamten Bereich $[-u_{DC}; u_{DC}]$ generiert werden. Auf diese Weise kann zwar der dritte logische Zusammenhang in (B.1) nicht ausgenutzt werden, dies ist jedoch unerheblich, da ein Spannungsmittelwert von Null durch geeignete Wahl des Tastverhältnisses erzeugt werden kann.

Als Trägersignal wurde in Abb. B.2 ein Dreiecksignal benutzt, andere Signaltypen wie z.B. Sägezahnsignale wären ebenfalls möglich. Abb. B.2(a) zeigt die sich ergebenden Steuersignale sowie die zugehörige Ausgangsspannung und den resultierenden Strom für den Fall einer **ohmsch-induktiven** Last und $u_{A,\mathrm{ref}} > 0$ bzw. $d > 50\%$. Der Verlauf derselben Größen für $u_{A,\mathrm{ref}} < 0$, d.h. $d < 50\%$, hingegen ist in Abb. B.2(b) wiedergegeben.

B.2.1.3 Dynamisches Verhalten bei Sollwertänderungen

Ändert sich der Spannungssollwert $u_{A,\mathrm{ref}}$, vergeht eine Zeit T_{str} bis sich der gleitende Mittelwert der Ausgangsspannung entsprechend einstellt. Diese Tatsache ist in Abb. B.3 ersichtlich. Der Vierquadrantensteller kann folglich als Verstärker mit verzögerndem Verhalten angesehen werden.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Kombination einer Spannungsquelle mit festem Ausgang u_{DC} und eines Vierquadranten-Pulsstellers zu einer einstellbaren Spannungsquelle führt, deren Ausgangsbereich dem Intervall $[-u_{DC}; u_{DC}]$ entspricht. Ferner kann der Energieaustausch bidirektional erfolgen. Somit eignet sich der Vierquadranten-Pulssteller besonders zum Einsatz als Stellglied im Anker- oder Erregerkreis von Gleichstromantrieben.

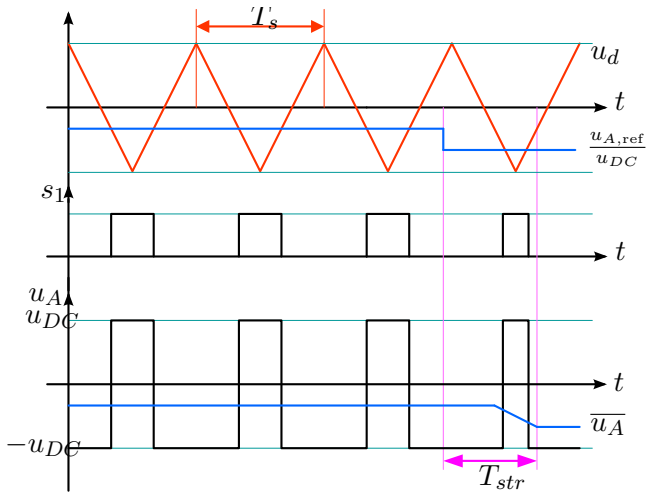


Abbildung B.3: *Wartezeit bei der Umsetzung von Sollwertänderungen.*

B.2.2 Fremderregte Gleichstrommaschine

B.2.2.1 Modellierung

Der grundsätzliche Aufbau der Gleichstrommaschine ist Abb. B.4 schematisch dargestellt. Da in ihrem Inneren sowohl elektromagnetische, als auch mechanische und thermische Vorgänge mit z. T. nichtlinearen Effekten auftreten, stellt sie ein komplexes System dar. Um dennoch geschlossene Beziehungen zwischen elektrischen und mechanischen Größen in einem einfach zu handhabenden Modell zu erhalten, werden zunächst folgende vereinfachende Annahmen gemacht:

- Der Einfluss des Ankerstroms auf das Luftspaltfeld (*Ankerrückwirkung*) wird vernachlässigt. Ankerrückwirkungen verschlechtern das Maschinenverhalten und es wird generell versucht, diese durch geeignete Designmethoden zu unterdrücken (z.B. Kompensationswicklungen bei größeren Maschinen [2], [12]), weswegen die Annahme grundsätzlich berechtigt ist.

- Der Auswirkung der Temperatur auf Erreger- sowie Ankerwiderstand wird keine Rechnung getragen.

- Bezüglich der magnetischen Materialeigenschaften wird lediglich der Einfluss der Eisensättigung auf den Erregerkreis berücksichtigt. Hierbei wird ebenfalls durch entsprechende Konstruktionsmaßnahmen angestrebt, Hysterese- oder Wirbelstromeffekte zu minimieren. Aus diesem Grund wird der Zusammenhang zwischen Erregerstrom und Erregerflussverkettung durch eine nichtlineare Funktion ausgedrückt.

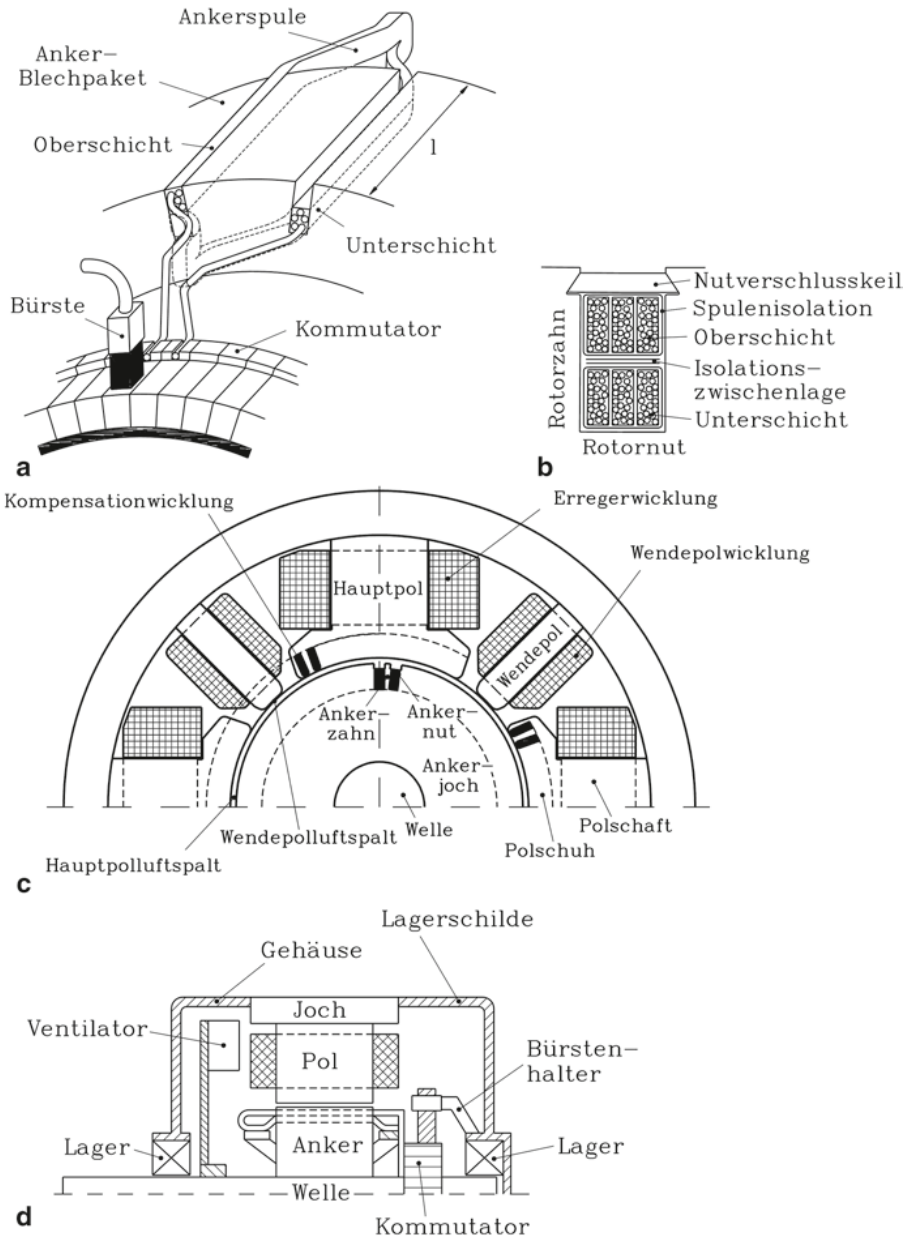


Abbildung B.4: *Aufbau der Gleichstrommaschine [2, 849]:*
(a) Läufer; (b) Läufer-Nutquerschnitt; (c) Schematischer Querschnitt der Maschine; (d) Längsschnitt des Motors.

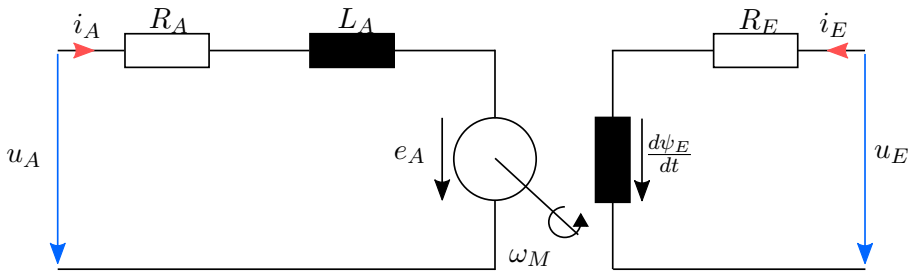


Abbildung B.5: *Elektrisches Ersatzschaltbild von Anker- und Erregerkreiswicklung.*

Unter Berücksichtigung obiger Vereinfachungen ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen elektrischen und mechanischen Größen:

$$\text{Ankerkreis:} \quad u_A(t) = e_A(t) + R_A\, i_A(t) + L_A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, i_A(t) \quad , i_A(0) = 0 \text{ [A]} \tag{B.4a}$$

$$\text{Gegenspannung:} \quad e_A(t) = C_M \cdot \psi_E(t) \cdot \omega_M(t) \tag{B.4b}$$

$$\text{Motormoment:} \quad m_M(t) = C_M \cdot \psi_E(t) \cdot i_A(t) \tag{B.4c}$$

$$\text{Erregerkreis:} \quad u_E(t) = R_E\, i_E(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \psi_E(t) \quad , \psi_E(0) = 0 \text{ [Vs]} \tag{B.4d}$$

$$\text{Magnetisierung:} \quad \psi_E(t) = f(i_E(t)) \quad \text{(nichtlinear)} \tag{B.4e}$$

$$\text{Mechanik:} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \omega_M(t) = \frac{1}{\Theta_M}\big(m_M(t) - m_L(t)\big) \quad , \omega_M(0) = 0 \text{ [rad/s]} \tag{B.4f}$$

Die in (B.4) verwendeten Symbole werden in Tabelle B.1 erläutert.

Symbol		Physikalische Größe	Symbol		Physikalische Größe
u_A	[V]	Ankerspannung	i_E	[A]	Erregerstrom
i_A	[A]	Ankerstrom	R_E	[Ω]	Erregerwiderstand
R_A	[Ω]	Ankerwiderstand	C_M	[1]	Maschinenkonstante
L_A	$\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$	Ankerinduktivität	m_M	[Nm]	Luftspaltmoment
e_A	[V]	Elektromotorische Kraft (EMK)	m_L	[Nm]	Lastmoment
ψ_E	$\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$	Erreger-Flussverkettung	Θ_M	$[\text{kgm}^2]$	Rotorträgheitsmoment
u_E	[V]	Erregerspannung	ω_M	$\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	Rotorwinkelgeschwindigkeit

Tabelle B.1: *Bedeutung der in (B.4) verwendeten Symbole.*

B.2.2.2 Stationäres Verhalten

Motorkennlinie Im *stationären* Betrieb, d. h. wenn die in der Maschine gespeicherte Energie konstant bleibt und sich die Zustandsgrößen i_A und ω_M nicht mehr ändern ($\mathrm{d}i_A/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\omega_A/\mathrm{d}t = 0$), ist die gesamte aufgenommene Leistung gleich der abgegebenen. Daraus folgt, dass für eine bestimmte Ankerspannung u_A ein fester Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehzahl in diesem Fall existiert. Wird beispielsweise ein Lastmoment angelegt, stellt sich eine zugehörige Drehzahl ein. Wird hingegen äußerlich ein bestimmter Drehzahlwert aufgezwungen, so gibt der Motor ein entsprechendes Drehmoment ab. Dies entspricht dem bekannten Betrieb einer Gleichstrommaschine an einer festen Gleichspannungsquelle.

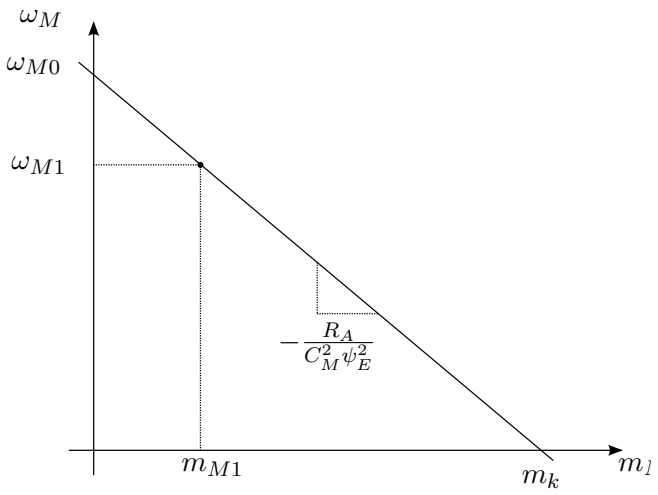


Abbildung B.6: *Stationäre Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie der Gleichstommaschine.*

Die stationäre Beziehung zwischen Drehmoment und Drehzahl kann aus dem Gleichungssystem (B.4) abgeleitet werden, indem Ankerspannung u_A und Ankerstrom i_A durch deren Abhängigkeiten von Drehmoment und Drehzahl in (B.4a) ersetzt werden:

Aus $$u_A = e_A + i_A \cdot R_A + L_A \cdot \cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}i_A}{\mathrm{d}t}}$$

unter Berücksichtigung von $i_A = \dfrac{m_M}{C_M \cdot \psi_E}$ und $e_A = C_M \cdot \psi_E \cdot \omega_M$

folgt $$u_A = R_A \cdot \frac{m_M}{C_M \psi_E} + C_M \cdot \psi_E \cdot \omega_M \tag{B.5}$$

Anhand $$m_M - m_L = \Theta_M \cdot \cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}\omega_M}{\mathrm{d}t}}$$

ergibt sich schließlich $$\omega_M = \frac{u_A}{C_M \psi_E} - \frac{R_A}{C_M^2 \psi_E^2} \cdot m_L \tag{B.6}$$

Gleichung (B.6) drückt einen linearen Zusammenhang zwischen Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit aus (siehe Abb. B.6). Der konstante Term entspricht der sog. *Leerlaufwinkelgeschwindigkeit* ω_{M0}. Diese stellt sich ein, wenn der Maschine keine mechanische Energie entnommen wird, d.h. $m_L = 0$. Wird der Motor mit einem positiven Lastmoment $m_L = m_{L1}$ beaufschlagt, verringert sich die Drehzahl und folglich die induzierte Spannung. Der Spannungsabfall am Widerstand der Ankerwicklung und daher der durch diese fließende Strom steigen. Somit erhöht sich das von der Maschine entwickelte Drehmoment, bis ein neues Gleichgewicht zustande kommt. Der resultierende Arbeitspunkt ist (m_{L1}, ω_1).

Wird der Rotor festgehalten, wird keine Bewegungsspannung in der Ankerwicklung induziert, sodass u_A die am Ankerwiderstand abfallende Spannung darstellt. Der resultierende Strom i_K wird als *Kurzschlussstrom* bezeichnet. In diesem Fall liefert die Maschine das Kurzschlussmoment:

$$m_K = C_M \cdot \psi_E \cdot i_K = C_M \cdot \psi_E \cdot \frac{u_A}{R_A} \tag{B.7}$$

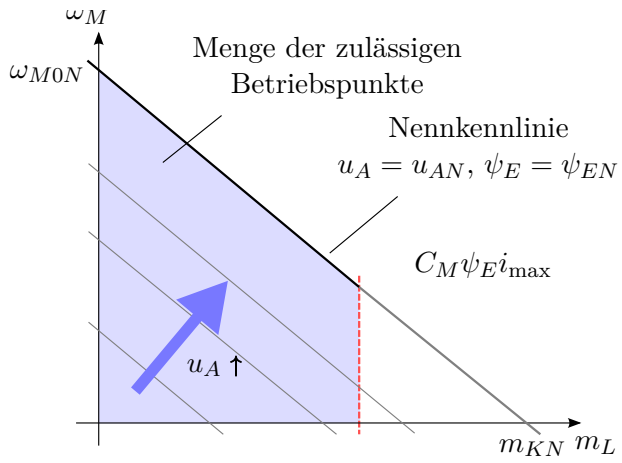


Abbildung B.7: *Betrieb im Ankerstellbereich.*

Beeinflussung der stationären Kennlinie Neben den durch den Maschinenaufbau festgelegten Parametern C_M und R_A wirken sich u_A und ψ_E auf die Kennlinie aus. Wenn die Ankerspannung u_A durch die an den Ankerklemmen angeschlossene Spannungsquelle vorgegeben ist, kann der Erregerfluss gemäß (B.4d) über die Erregerspannung eingestellt werden. Folglich kann die Maschinenkennlinie auf zwei verschiedene Weise beeinflusst werden.
Wird die Ankerspannung variiert, jedoch der Erregerfluss auf seinen Nennwert ψ_{EN} gehalten, verschieben sich die Schnittpunkte der Kennlinie mit den Koordinatenachsen, ohne dass sich deren Steigung ändert. Diese Ansteuerungsart nennt sich *Ankerstellbetrieb* (siehe Abb. B.7). Da sowohl der Isolierlack der Rotorwicklung, als auch der Bereich zwischen zwei benachbarten Kommutatorlamellen eine begrenzte Isolationsfestigkeit aufweist, darf die Ankerspannung nicht über deren Nennwert u_{AN} erhöht werden. Aus diesem Grund können durch dieses Prinzip nur Betriebspunkte unterhalb der Nennkennlinie erreicht werden.
In der Praxis wird bei der Dimensionierung eines Motors ein kleiner Wert für den Ankerwiderstand angestrebt, um den Wirkungsgrad zu maximieren. Diese Maßnahme führt jedoch dazu, dass der unter Nennspannung im Stillstand resultierende Strom Wärmeverluste u_{AN}^2/R_A zur Folge hätte, die die Isolierung der Rotorwicklung beschädigen würden. Dementsprechend wird der Ankerstrom auf einen Wert $i_{max} < i_K$ begrenzt und der Betrieb im Bereich des Schnittpunkts der Nennkennlinie mit der Abzissenachse somit ausgeschlossen.
Stationäre Betriebspunkte über der Nennkennlinie lassen sich jedoch erreichen, wenn bei Ankernennspannung der Erregerfluss abgesenkt wird. Diese Vorgehensweise wird als *Feldschwächung* bezeichnet. Wie aus (B.4b) hervorgeht, führt dies zu einer Verringerung der Gegenspannung, die bei einer Winkelgeschwindigkeit ω_M in der Ankerwicklung induziert wird, sodass höhere Drehzahlen als die Nennleerlaufdrehzahl erreicht werden können. Allerdings hat die Senkung der magnetischen Erregung gleichzeitig zur Folge, dass das bei einem gewissen Strom i_A entwickelte Drehmoment geringer wird (siehe (B.4c)). Folglich entspricht die Minderung der magnetischen Erregung einer Drehung der Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie im Uhrzeigersinn (Abb. B.8).

B.2.3 Sensorik

Betreibt man eine Gleichstrommaschine an einem Prüfstand, ist der Zugriff auf die physikalischen Größen, wie z. B. Drehzahl oder Ankerstrom, nur durch den Einbau bestimmter Sensoren möglich. Die Mitschrift einer physikalischen Größe selbst ist je nach Messprinzip demnach immer zeitverzögert, verrauscht, verzerrt, mit Messfehlern wie Versatz, Quantisie-

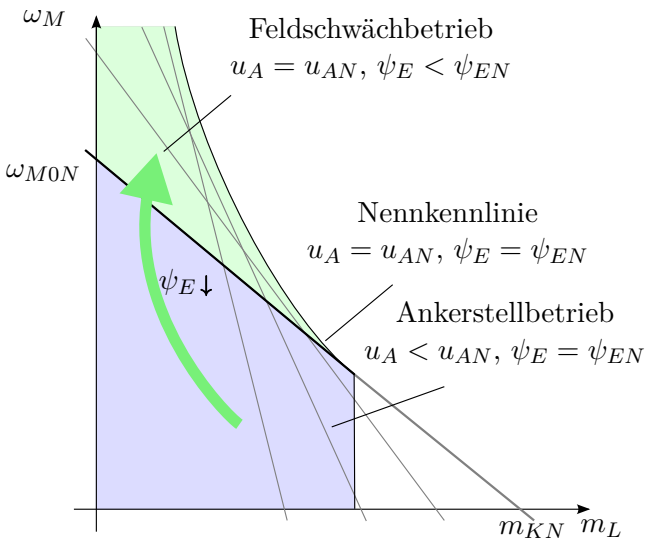


Abbildung B.8: *Erweiterung des Betriebsbereichs mittels Feldschwächung.*

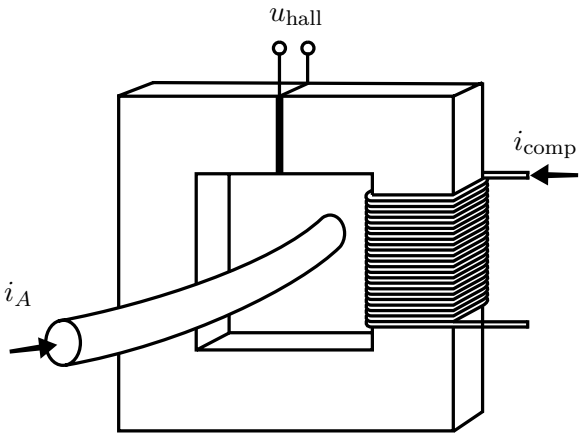


Abbildung B.9: *Aufbau eines Kompensationswandlers.*

rung und Nichtlinearität behaftet und/oder beeinflusst von anderen physikalischen Größen, wie Temperatur, statische oder zeitveränderliche Magnetfelder sowie Erschütterungen. Diese Messfehler stellen in der Praxis oft einen wesentlichen Begrenzungsfaktor für die Leistungsfähigkeit des gesamten Antriebssystems dar. Aus diesem Grund wird im Folgenden auf die wichtigsten Ursachen von Messfehlern näher eingegangen.

B.2.3.1 Stromerfassung

Die Strommessung erfolgt meistens über *Shuntwiderstände* oder *Kompensationwandler*. Ein sog. *Shunt* ist ein geeichter, niederohmiger Widerstand über dem eine stromproportionale Spannung abfällt. Aufgrund der im Shunt entstehenden Wärmeleistung muss die an dessen Klemmen abgegriffene Spannung klein gehalten werden, weswegen sie vor ihrer Digitalisierung durch einen Analog-Digital-Wandler (ADC) immer mittels analoger Schaltungen in den Bereich von etwa $[-10V; 10V]$ verstärkt wird. Dies hat ein relativ starkes Messrauschen zur Folge.
Abbildung B.9 zeigt die elementaren Komponenten im Aufbau eines Kompensationswandlers. Darin umschließt ein Eisenkern den Leiter, in dem der zu messende Strom i_A fließt. Ein

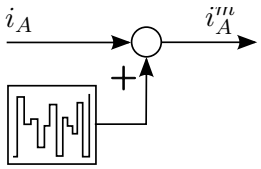


Abbildung B.10: *Verwendetes Modell der Strommessung.*

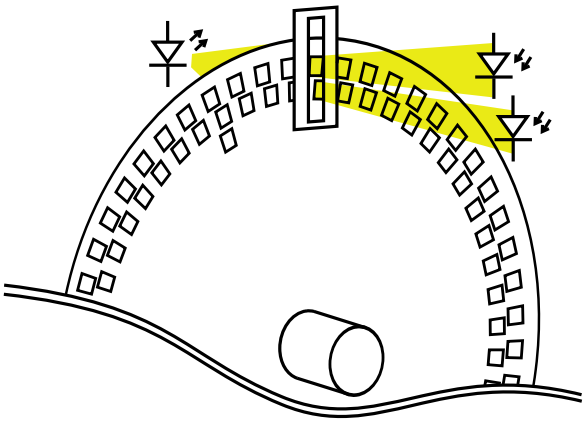


Abbildung B.11: *Skizzenhafte Darstellung eines optischen Inkremental-Gebers.*

Hall-Sensor erfasst das im Eisenkern vorhandene Magnetfeld und liefert eine Spannung u_{hall}, mithilfe deren der Strom in der Sekundärwicklung (*Kompensationsstrom* i_{comp}) so geregelt wird, dass das Gesamtmagnetfeld im Eisenkern ausgelöscht wird. Damit ist der Kompensationsstrom zu jeder Zeit dem zu ermittelden Strom proportional. Den Proportionalitätsfaktor bildet dabei die Windungszahl der Sekundärwicklung. Im Allgemeinen wird der Kompensationsstrom zur Auswertung durch einen ADC über einen Shunt in eine Spannung umgewandelt. Im Hinblick auf die niedrigen Stromstärken im Sekundärkreis kann einen größeren Shuntwiderstand zur Erhöhung des Signal-Rausch-Verhältnisses gewählt werden. Bedingt durch das Prinzip des Hallsensors und die Remanenz im Eisenkern führt dieses Messverfahren jedoch zu größeren Versätzen (*engl. offsets*) in den ermittelten Werten.
Zusammenfassend sind Messrauschen und Offset die bedeutendsten Fehlerquellen bei der Strommessung. Im Rahmen des Praktikums wird der Offset vernachlässigt und die Strommessung als Überlagerung des tatsächlichen Stromes mit einem Rauschsignal modelliert, wie in Abb. B.10 dargestellt.

B.2.3.2 Drehzahlmessung

In der Praxis wird zur Drehzahlmessung meist die Ableitung des Rotorwinkelsignals verwendet, welches über einen am Rotor befestigten Drehgeber erfasst wird.
Die am häufigsten verwendeten Lagegeber sind *Inkrementalgeber* (oder *Inkremental-Encoder*) sowie *Resolver*, wobei im weiteren Verlauf nur Inkrementalgeber in Betracht gezogen werden. Das der Positionsmessung zugrunde liegende physikalische Prinzip kann bei Inkrementalgebern entweder magnetischer oder optischer Natur sein. In seiner einfachsten Ausführung besteht der optische Inkrementalgeber im Wesentlichen aus einer Scheibe, eine Lichtquelle sowie zwei Photodetektoren (siehe Skizze in Abb. B.11). Entlang des Umfangs der Scheibe sind zwei Spuren mit äquidistanten Schlitzen (Strichen), z. B. 1024, angeordnet. Beide Spuren sind um ein Viertel des Abstands zwischen zwei Schlitzen zueinander verschoben, wodurch die Photodetektoren ein zueinander um 90 Grad phasenverschobenes Rechteckspannungssi-

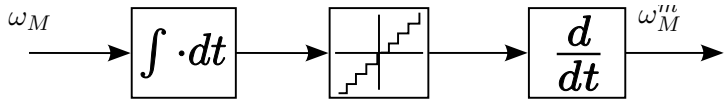


Abbildung B.12: *Modellierung der Drehzahlerfassung.*

gnal ausgeben. Dies ermöglicht, neben der Erkennung der Drehrichtung, auch eine Erhöhung der Positionsauflösung um ein Vierfaches, d.h. mit einem 1024-Strich-Geber können bis zu 4096 diskrete Winkelstellungen je Umdrehung voneinander unterschieden werden. Bei magnetischen Inkrementalgebern wird eine Scheibe aus hartmagnetischem Material benutzt, deren Rand Regionen abwechselnder magnetischer Polarität aufweist.
In den Simulationen wird bei der Drehzahlermittlung dem Verhalten des Inkrementalgebers Rechnung getragen, indem die durch das Modell der Gleichstrommaschine gelieferte Winkelgeschwindigkeit zunächst zu einem Winkel integriert wird, welcher anschließend entsprechend der verwendeten Strichzahl quantisiert und das resultierende Signal nach der Zeit differenziert wird (siehe Abb. B.12).

B.3 Regelung

B.3.1 Übersicht

Im vorangegangenen Teil wurden vereinfachte Modelle der Komponenten eines Gleichstromantriebs (Gleichstrommotor, Vierquadranten-Pulssteller, Sensorik) erarbeitet. Sie sollen nun zur Untersuchung des Gleichstromantriebs im geschlossenen Regelkreis herangezogen werden.

Hierbei werden, wie in der Praxis üblich, die Zustandsgrößen *Ankerstrom* i_A und *Rotorwinkelgeschwindigkeit* ω_M in einer kaskadierten Struktur durch lineare Regler vom Typ PID (Proportional-Integral-Differential) geregelt (vgl. Abb. B.13). Dies bedeutet zum einen, dass Strom- und Drehzahlregelkreis ineinander verschachtelt sind und zum anderen, dass sowohl ein Regler für den Ankerstrom, als auch einer für die Winkelgeschwindigkeit zu entwerfen sind.

In der industriellen Antriebstechnik werden die Reglerparameter häufig nach dem *Betragsoptimum* bzw. dem *Symmetrischen Optimum* bestimmt. Diese Vorgehensweise erfordert einen relativ geringen Aufwand bei der Modellierung des zu regelnden Systems und liefert dennoch zufriedenstellende Ergebnisse im Hinblick auf Stabilität und Dynamik des geschlossenen Regelkreises.

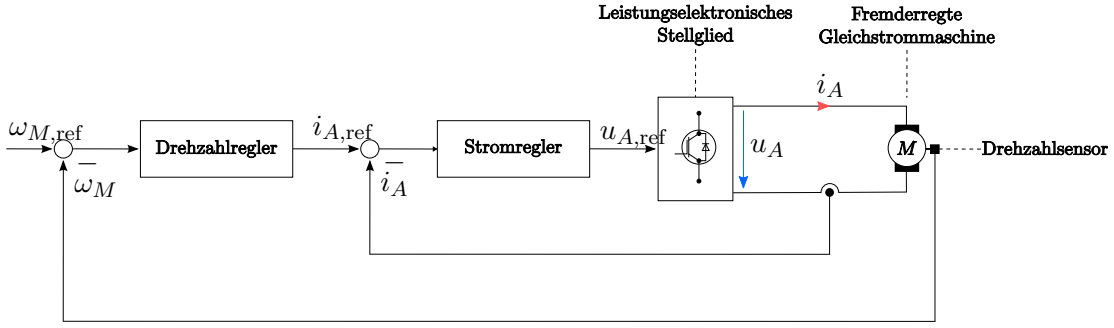


Abbildung B.13: *Prinzipdiagramm einer Drehzahl-Strom-Regelung in Kaskadenstruktur.*

Im Folgenden werden die grundlegenden Eigenschaften der im vorherigen Kapitel entwickelten Modelle kurz zusammengefasst.

B.3.2 Modelle und Signalflusspläne

Die wichtigsten Eigenschaften der im ersten Teil erarbeiteten Modelle der Gleichstrommaschine, des Pulsstellers sowie der Sensorik werden in diesem Abschnitt zusammengefasst.

B.3.2.1 Gleichstrommotor

Aus den in (B.4) gegebenen Gleichungen lässt sich der Signalflussplan in Abb. B.14 ableiten.

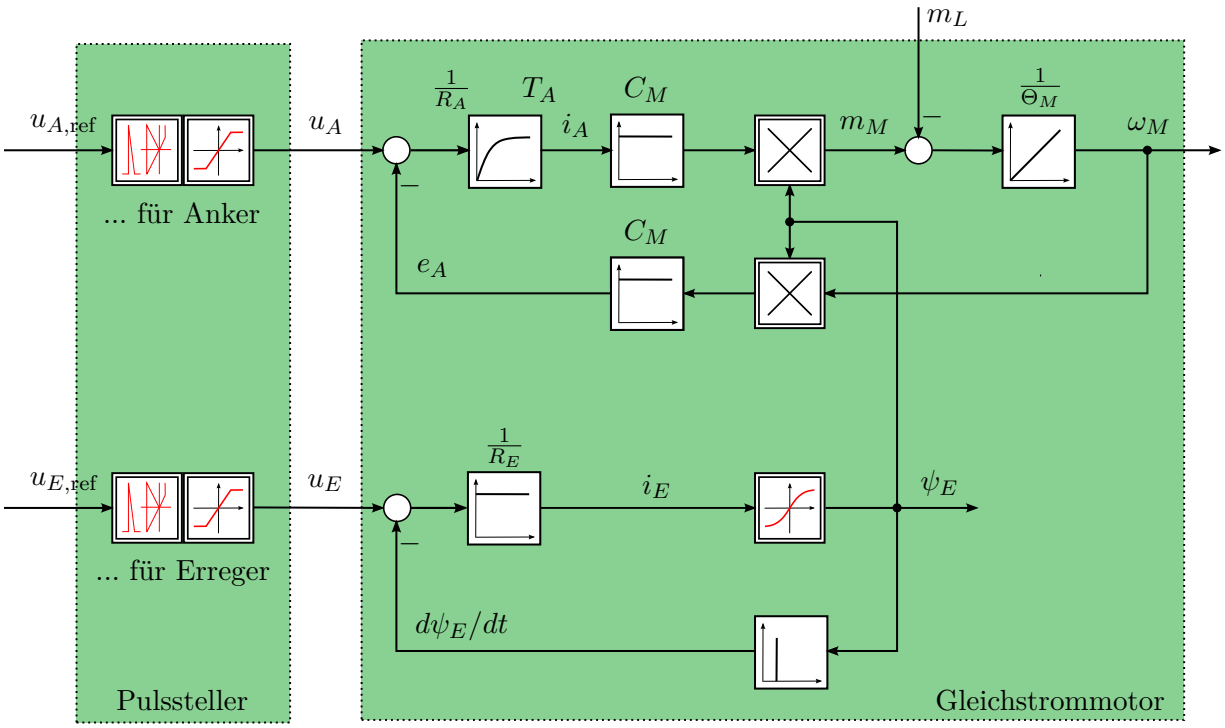


Abbildung B.14: *Signalflussplan eines fremderregten Gleichstrommotors mit Pulssteller im Anker- und Erregerkreis.*

B.3.2.2 Leistungselektronische Stellglieder

Sowohl Anker-, als auch Erregerspannung werden von einem Pulsrichter zur Verfügung gestellt. Wie im vorigen Versuch vorgestellt, werden die beiden Pulsrichter als verstärkende Verzögerungs- bzw. PT1-Glieder modelliert. Wie sich im weiteren Verlauf herausstellen wird, wird diese Approximation den Reglerentwurf vereinfachen. Die Übertragungsfunktion der leistungselektronischen Stellglieder lautet somit:

$$F_{STR}(s) = \frac{u(s)}{u_{\text{ref}}(s)} = V_{STR} e^{-sT_{STR}} \approx \frac{V_{STR}}{1 + sT_{STR}} \tag{B.8}$$

Hierbei stellt V_{STR} die Verstärkung des Pulsrichters und $T_{STR} = T_{w,max}$ die maximale Wartezeit bei der Übernahme von Sollwerten dar.

In der Tat kann der Betrag der Spannung am Ausgang der Spannungswandler den Wert der

Zwischenkreisspannung u_{DC} nicht übersteigen. Dies wird in den Simulationen durch Einführen einer Spannungsbegrenzung berücksichtigt.

B.3.2.3 Sensorik

Wie im ersten Teil sind die Strommesssignale i_A^m und i_E^m mit Rauschen behaftet. Der Rotorwinkel wird anhand eines Inkrementalgebers ermittelt und die Winkelgeschwindigkeit ω_M durch eine zeitliche Ableitung daraus bestimmt. Für den Reglerentwurf wird angenommen, dass die Sensoren keine eigene Dynamik besitzen, d. h. es besteht keine Verzögerung zwischen dem Verlauf der gemessenen Größen i_A, i_E, ω_M und den zugehörigen Messsignalen i_A^m, i_E^m und ω_M^m.
Das Rauschen in einem Messsignal x, $x \in \{i_A, i_E, \omega_M\}$, wird mithilfe eines PT1-Filters mit der Zeitkonstante $T_{g,x}$ unterdrückt:

$$F_g(s) = \frac{\hat{x}(s)}{x^m(s)} = \frac{1}{1 + sT_{g,x}} \tag{B.9}$$

Für die im weiteren Verlauf zu entwerfenden Regler stehen **ausschließlich** die **gefilterten** Messignale als Eingangsgrößen zur Verfügung.

In Abb. B.15 sind schließlich alle Komponenten des zu regelnden Antriebssystems als kompakter Signalflussplan veranschaulicht.

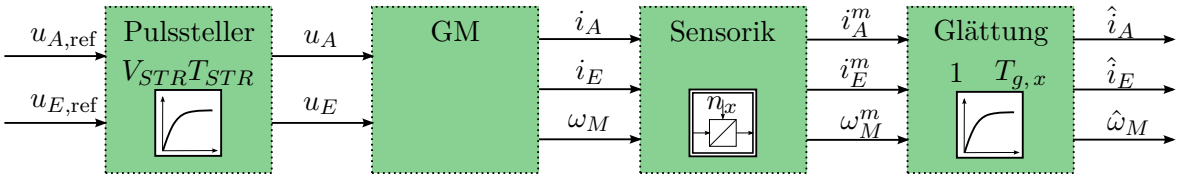


Abbildung B.15: *Komponenten des untersuchten Antriebssystems.*

B.3.3 Regelung

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Auslegung des Stromreglers im inneren Regelkreis der Kaskadenstrukur (siehe Abb. B.13), wobei ein Betrieb im Ankerstellbereich, d. h. $\psi_E = \psi_{EN}$, vorausgesetzt wird. Wie in der elektrischen Antriebstechnik gebräuchlich, wird zur Reglerauslegung das Betragsoptimum (BO) bzw. das Symmetrische Optimum (SO) angewendet.

Die theoretischen Hintergründe dieser Optimierungsverfahren zum Reglerentwurf und deren Anwendung auf den speziellen Fall des Gleichstromantriebes werden in [18], Kapitel 3 bzw. 7, ausführlich behandelt.

Anhang C

Grundlagen der Drehfeldmaschinen (siehe [17] und [18])

C.1 Übersicht

Drehfeldmaschinen erfordern durch den Wegfall des Kommutators (im Vergleich zur Gleichstrommaschine) einen wesentlich geringeren Wartungsaufwand und eignen sich somit besonders für einen robusten Einsatz in industriellen Anlagen. Hierbei sind dreisträngige Asynchronmotoren (mit Käfigläufer) sowie Synchronmaschinen mit Permanentmagneten am weitesten verbreitet. Drehfeldmaschinen werden in der Regel durch *Spannungszwischenkreisumrichter* gespeist.

C.2 Allgemeines Grundwellenmodell von Drehfeldmaschinen

C.2.1 Danksagung

Abschnitt C.2 wurde von Dipl.-Ing. Julien Cordier (Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik) erarbeitet und zur Verfügung gestellt. Hierfür möchte sich der Autor ganz herzlich bedanken. Die folgenden Unterabschnitte wurden teilweise abgeändert (v.a. zur Vereinheitlichung der Nomenklatur).

C.2.2 Annahmen zur Modellbildung

Wie im Falle der Gleichstrommaschine sind die in Drehfeldmaschinen auftretenden elektromagnetischen, mechanischen sowie thermischen Vorgänge komplex und im Allgemeinen nicht linear. Aus diesem Grund müssen einige vereinfachende Annahmen zur Modellbildung gemacht werden:

- Die räumlich-radiale Verteilung der magnetischen Durchflutung und des magnetischen Luftspaltfeldes an der Statorbohrung werden als sinusförmig angesehen. Diese Annahme trifft lediglich in erster Näherung zu. In praktischen Fällen wird zwar angestrebt, den Oberwellengehalt der Durchflutung durch geschickte Wahl der Nutenzahl und Verteilung der Wicklungen (z. B. *Sehnung*, vgl. [2, 12]) zu reduzieren, Oberwellen lassen sich jedoch aufgrund der diskreten Verteilung nicht vollständig unterdrücken. Ferner führen die Nutöffnungen zu Variationen der Luftspaltbreite, welche sich ebenfalls auf die Feldverteilung auswirken.

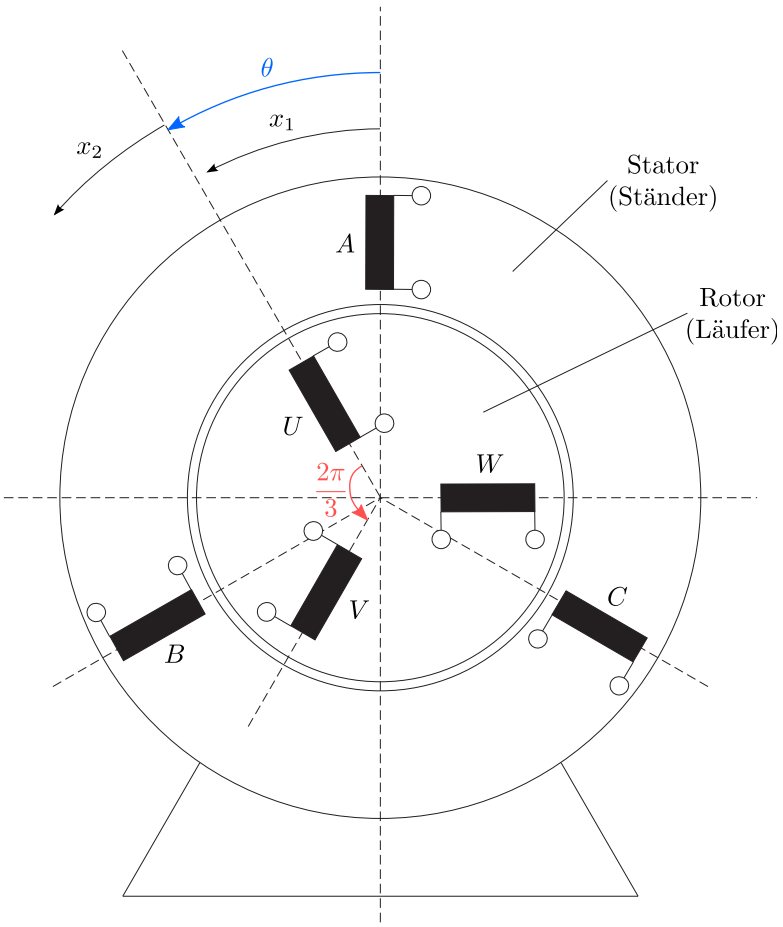


Abbildung C.1: *Prinzipdarstellung der betrachteten Anordnung*
x_1: ständerbezogene Umfangskoordinate; x_2: läuferbezogene Umfangskoordinate;
θ: Winkel zwischen den Achsen der Stränge A und U

- Die Blechpakete im Stator und Rotor besitzen lineare magnetische Eigenschaften. Sättigung, Hysterese sowie Wirbelströmen werden keine Rechnung getragen.
- Die Auswirkung der Temperatur auf Widerstands- und Induktivitätswerte wird vernachlässigt.

Die Vernachlässigung der Oberwellen im räumlichen Verlauf der Luftspaltgrößen führt zu sog. *Grundwellenmodellen*. Zur Herleitung eines für Synchron- und Asynchronmaschinen allgemein gültigen Grundwellenmodells wird zuerst eine Drehfeldmaschine mit sowohl einem Wicklungssatz im Stator (Stränge A, B, C), als auch im Rotor (Stränge U, V, W) betrachtet (vgl. Abb. C.1). Hierbei werden die nachstehenden Bedingungen vorausgesetzt:

- Stator und Rotor sind symmetrisch aufgebaut.
- Die Stränge auf Stator- bzw. Rotorseite sind symmetrisch gewickelt und deren Achsen um 2/3 der *Polteilung* τ_p, d. h. 2/3 der halben räumlichen Periode der Durchflutungsgrundwelle, versetzt. Alle Statorwicklungen (bzw. Rotorwicklungen) besitzen n_1 (bzw. n_2) Windungen.
- Beide Wicklungssätze sind sternförmig verschaltet. Beide Sternpunkte sind isoliert bzw. potentialfrei.

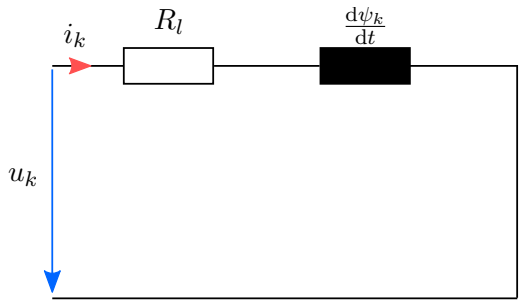


Abbildung C.2: *Definition der verwendeten elektrischen Stranggrößen* ($k \in \{A, B, C, U, V, W\}$, $l \in \{1, 2\}$)

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit wird der Übersichtlichkeit halber die Polpaarzahl $p = 1$ gewählt. Folglich sind die Achsen der Strangwicklungen auf Stator- bzw. Rotorseite räumlich um 120° versetzt. Zur Bestimmung der Rotorlage innerhalb einer *Polpaarteilung*, d. h. einer vollen räumlichen Periode der Durchflutungsgrundwelle, wird der Winkel θ zwischen den Strängen A und U herangezogen. Im betrachteten Fall entspricht θ dem mechanischen Rotorwinkel θ_M.

Im weiteren Verlauf werden strangbezogene Größen wie Spannungen, Ströme oder Flussverkettungen mit dem Index k des entsprechenden Strangs ($k \in \{A, B, C, U, V, W\}$) gekennzeichnet. Stator- bzw. Rotorgrößen, wie Widerstände oder Induktivitäten, werden mit dem Index 1 bzw. 2 versehen.

C.2.3 Elektrische Differentialgleichungen

Anwenden der Kirchhoffschen Maschenregel auf die statorseitigen Wicklungsstränge führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{cases} u_A = R_1 i_A + \dfrac{\mathrm{d}\psi_A}{\mathrm{d}t} \\ u_B = R_1 i_B + \dfrac{\mathrm{d}\psi_B}{\mathrm{d}t} \\ u_C = R_1 i_C + \dfrac{\mathrm{d}\psi_C}{\mathrm{d}t}. \end{cases} \tag{C.1}$$

Hierbei bezeichnen u_k, i_k bzw. Ψ_k ($k \in \{A, B, C\}$) die Spannungen, Ströme bzw. Flussverkettungen der jeweiligen Stränge und R_1 deren Widerstand.

Für die Rotorstränge mit dem Widerstand R_2 gilt:

$$\begin{cases} u_U = R_2 i_U + \dfrac{\mathrm{d}\psi_U}{\mathrm{d}t} \\ u_V = R_2 i_V + \dfrac{\mathrm{d}\psi_V}{\mathrm{d}t} \\ u_W = R_2 i_W + \dfrac{\mathrm{d}\psi_W}{\mathrm{d}t}. \end{cases} \tag{C.2}$$

Zur übersichtlichen Darstellung der Zusammenhänge werden die Stranggrößen in Vektoren

zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \begin{pmatrix} u_A & u_B & u_C \end{pmatrix}^\top & \boldsymbol{u}_2 &= \begin{pmatrix} u_U & u_V & u_W \end{pmatrix}^\top \\ \boldsymbol{i}_1 &= \begin{pmatrix} i_A & i_B & i_C \end{pmatrix}^\top & \boldsymbol{i}_2 &= \begin{pmatrix} i_U & i_V & i_W \end{pmatrix}^\top \\ \boldsymbol{\psi}_1 &= \begin{pmatrix} \psi_A & \psi_B & \psi_C \end{pmatrix}^\top & \boldsymbol{\psi}_2 &= \begin{pmatrix} \psi_U & \psi_V & \psi_W \end{pmatrix}^\top . \end{aligned}$$

Somit lassen sich die Gleichungen (C.1) und (C.2) in die folgende Form überführen:

$$\boldsymbol{u}_1 = R_1 \boldsymbol{i}_1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_1}{\mathrm{d}t} \tag{C.3}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = R_2 \boldsymbol{i}_2 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_2}{\mathrm{d}t} \tag{C.4}$$

C.2.4 Magnetische Zusammenhänge

C.2.5 Flussverkettungen der einzelnen Stränge

Um geschlossene Beziehungen zu erhalten, werden nachfolgend die Flussverkettungen der einzelnen Stränge genauer analysiert. Im Allgemeinen ist davon auszugehen, dass alle sechs Stränge magnetisch miteinander verkoppelt sind.

Unter der Annahme linearer magnetischer Verhältnisse ergibt sich beispielsweise die Flussverkettung des Strangs A, Ψ_A, demnach aus der Summe von sechs Anteilen:

$$\psi_A = \underbrace{\psi_{AA}}_{\text{I}} + \underbrace{\psi_{AB} + \psi_{AC}}_{\text{II}} + \underbrace{\psi_{AU} + \psi_{AV} + \psi_{AW}}_{\text{III}} . \tag{C.5}$$

Neben der durch den Term I ausgedrückten Verkettung mit dem Eigenfeld, stellen die Anteile II bzw. III die Kopplung mit den anderen statorseitigen Strängen bzw. mit den rotorseitigen Spulen dar.

Als Folge der angenommenen magnetischen Linearität lassen sich die jeweiligen Anteile von Ψ_A auf einfache Weise mithilfe der Strangströme angeben. Zu diesem Zweck werden die vom magnetischen Zustand der Maschine unabhängigen Induktivitäten $L_{Ak}, k \in \{A, B, C, U, V, W\}$ eingeführt:

$$\psi_A = L_{AA} i_A + L_{AB} i_B + L_{AC} i_C + L_{AU}(\theta) i_U + L_{AV}(\theta) i_V + L_{AW}(\theta) i_W \tag{C.6}$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass sich die Kopplung zwischen Strang A und den Rotorwicklungen mit den Rotorwinkel θ ändert, sodass die Induktivitäten L_{AU}, L_{AV} sowie L_{AW} ebenfalls von θ abhängig sind.

Die Flussverkettungen der anderen Stränge können analog ermittelt werden. Es ergeben sich die nachstehenden Beziehungen zwischen den Vektoren $\boldsymbol{\psi}_1$ und $\boldsymbol{i}_1$ bzw. $\boldsymbol{\psi}_2$ und $\boldsymbol{i}_2$:

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{L}_{12}(\theta) \boldsymbol{i}_2 \tag{C.7}$$

$$\boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{L}_{21}(\theta) \boldsymbol{i}_1 \tag{C.8}$$

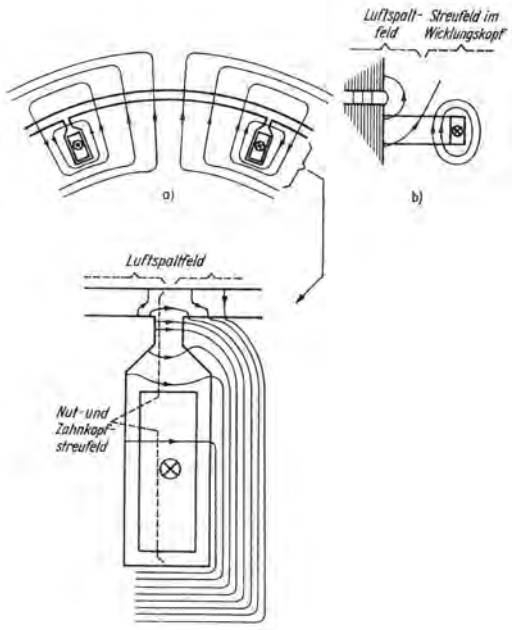


Abbildung C.3: *Aufteilung des Magnetfelds einer Wicklung in Luftspalt- und Streufeld [12, S. 235]*
(a) Aufteilung im Querschnitt; (b) Aufteilung im Längsschnitt

Für die resultierenden Induktivitätsmatrizen gilt:

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} L_{UU} & L_{UV} & L_{UW} \\ L_{VU} & L_{VV} & L_{VW} \\ L_{WU} & L_{WV} & L_{WW} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_{12}(\theta) = \begin{bmatrix} L_{AU}(\theta) & L_{AV}(\theta) & L_{AW}(\theta) \\ L_{BU}(\theta) & L_{BV}(\theta) & L_{BW}(\theta) \\ L_{CU}(\theta) & L_{CV}(\theta) & L_{CW}(\theta) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{L}_{21}(\theta) = \begin{bmatrix} L_{UA}(\theta) & L_{UB}(\theta) & L_{UC}(\theta) \\ L_{VA}(\theta) & L_{VB}(\theta) & L_{VC}(\theta) \\ L_{WA}(\theta) & L_{WB}(\theta) & L_{WC}(\theta) \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen $\boldsymbol{L}_1$ und $\boldsymbol{L}_2$ drücken die magnetische Kopplung zwischen den Strängen innerhalb des stator- bzw. rotorseitigen Wicklungssatzes aus, wohingegen $\boldsymbol{L}_{12}(\theta)$ und $\boldsymbol{L}_{21}(\theta)$ die Wechselwirkungen zwischen beiden Wicklungssätzen zum Ausdruck bringen.

C.2.5.1 Eigeninduktivitäten der Stränge auf Stator- und Rotorseite

Die Eigeninduktivitäten des statorseitigen bzw. rotorseitigen Wicklungssatzes sind durch die Diagonalelemente der Matrizen $\boldsymbol{L}_1$ bzw. $\boldsymbol{L}_2$ dargestellt. Diese sollen nachfolgend genauer beschrieben werden.

Statorseitiger Wicklungssatz

Wird beispielsweise der Strang A auf dem Ständer durch den Strom i_A durchflossen, entsteht ein magnetischer Feldverlauf, welcher sich großenteils über den Luftspalt und den Rotor schließt. Dieser Teil ist somit mit den Spulen aller Stränge auf dem Stator und dem Rotor verkettet und wird als *Luftspaltfeld* bezeichnet. Der restliche Teil, das *Streufeld*, ist lediglich mit den Leitern des Strangs A verkettet (siehe Abb. C.3 und [12], [2]). Der resultierende

magnetische Fluss Φ_A, welcher die Wicklungen des Strangs A durchsetzt, kann folglich in zwei Anteile zerlegt werden: Einen *Hauptflussanteil* Φ_{hA} und einen *Streuflussanteil* $\Phi_{\sigma A}$. Es gilt $\Phi_A = \Phi_{hA} + \Phi_{\sigma A}$. Hierbei wird in erster Näherung angenommen, dass alle Windungen der verteilten Strangwicklungen vom selben Fluss Φ_A durchsetzt werden.

Werden die *Reluktanzen* (magnetischen Widerstände) R_{mhA} und $R_{m\sigma A}$ dem Hauptflussanteil bzw. dem Streuflussanteil zugeordnet, ergeben sich folgende Zusammenhänge aus dem Hopkinsonschen Gesetz:

$$\Phi_{hA} = \frac{n_1 i_A}{R_{mhA}} \tag{C.9}$$

$$\Phi_{\sigma A} = \frac{n_1 i_A}{R_{m\sigma A}} \tag{C.10}$$

Für die Flussverkettung des Strangs A folgt:

$$\psi_A = n_1 \Phi_A = \frac{n_1^2}{R_{mhA}} i_A + \frac{n_1^2}{R_{m\sigma A}} i_A. \tag{C.11}$$

Aus Gleichung (C.11) können die *Hauptinduktivität* L_{hA} und die *Streuinduktivität* $L_{\sigma A}$ des Strangs A definiert werden:

$$L_{hA} := \frac{n_1^2}{R_{mhA}} \tag{C.12}$$

$$L_{\sigma A} := \frac{n_1^2}{R_{m\sigma A}}. \tag{C.13}$$

Die *Eigeninduktivität* des Strangs A ergibt sich gemäß Gl. (C.11) zu:

$$L_{AA} = L_{hA} + L_{\sigma A}. \tag{C.14}$$

Bedingt durch den symmetrischen Maschinenaufbau sowie die zuvor angenommenen Ausführungsmerkmale des statorseitigen Wicklungssatzes gilt für die Stränge B und C:

$$R_{mhB} = R_{mhC} = R_{mhA} =: R_{mh1} \tag{C.15}$$

$$R_{m\sigma B} = R_{m\sigma C} = R_{m\sigma A} =: R_{m\sigma 1}. \tag{C.16}$$

Für die Induktivitäten folgt:

$$L_{hB} = L_{hC} = L_{hA} = L_{h1} = \frac{n_1^2}{R_{mh}} \tag{C.17}$$

$$L_{\sigma B} = L_{\sigma C} = L_{\sigma A} = L_{\sigma 1} = \frac{n_1^2}{R_{m\sigma 1}} \tag{C.18}$$

$$L_{BB} = L_{CC} = L_{AA} = L_{h1} + L_{\sigma 1}. \tag{C.19}$$

Hierbei stellen L_{h1} und $L_{\sigma 1}$ die Hauptinduktivität bzw. die Streuinduktivität des statorseitigen Wicklungssatzes dar.

Rotorseitiger Wicklungssatz

Die Eigeninduktivitäten L_{UU}, L_{VV} und L_{WW} der auf dem Läufer angebrachten Wicklungen können analog berechnet werden. Hierbei wird der Streuanteil des magnetischen Flusses der Reluktanz $R_{m\sigma 2}$ zugeordnet. Ferner wird davon ausgegangen, dass der Hauptflussanteil, wie

auf der Statorseite, über den magnetischen Widerstand R_{mh} mit dem Strom in Verbindung steht. Daraus folgt:

$$L_{h2} = L_{hU} = L_{hV} = L_{hW} = \frac{n_2^2}{R_{mh}} \tag{C.20}$$

$$L_{\sigma 2} = L_{\sigma U} = L_{\sigma V} = L_{\sigma W} = \frac{n_2^2}{R_{m\sigma 2}} \tag{C.21}$$

$$L_{UU} = L_{VV} = L_{WW} = L_{h2} + L_{\sigma 2} \tag{C.22}$$

C.2.5.2 Koppelinduktivitäten zwischen den Strängen eines Wicklungssatzes

Nun werden die Koppelterme in den Matrizen $\boldsymbol{L}_1$ und $\boldsymbol{L}_2$ untersucht. Diese beschreiben die magnetische Kopplung zwischen den Strängen innerhalb eines Wicklungssatzes.

Statorseitiger Wicklungssatz

Es wird angenommen, dass die magnetische Kopplung zwischen den Strängen eines Wicklungssatzes über das Luftspaltfeld und somit über den magnetischen Widerstand R_{mh} erfolgt.

Fließt der positive Strom i_A durch die Wicklungen des Strangs A, folgt unter den in Abschnitt C.2.2 aufgeführten Voraussetzungen eine sinusförmige Verteilung der radialen Komponente des Luftspaltfeldes über der Umfangskoordinate x_1. Hierbei weist diese Komponente B_r eine räumliche Periodizität gleich der doppelten Polteilung τ_p auf und erreicht deren Maximum $\hat{B}_r$ in der Achse des Strangs A, d. h. bei $x_1 = 0$:

$$B_r = \hat{B}_r \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} x_1\right). \tag{C.23}$$

Die Wicklungsachsen der Stränge B und C sind um 2/3 bzw. 4/3 der Polteilung τ_p gegenüber der Achse des Strangs A versetzt. An den entsprechenden Stellen beträgt die radiale Komponente des vom Strom i_A herrührenden Luftspaltfelds $-1/2\hat{B}_r$ und erzeugt demnach einen negativen Fluss durch die Wicklungen der Stränge B und C.

Somit gilt:

$$L_{AB} = L_{AC} = -\frac{n_1^2}{2R_{mh}} = -\frac{L_{h1}}{2}. \tag{C.24}$$

Die Herleitung der anderen Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{L}_1$ erfolgt auf ähnliche Weise und es folgt:

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} L_{h1} + L_{\sigma 1} & -\frac{L_{h1}}{2} & -\frac{L_{h1}}{2} \\ -\frac{L_{h1}}{2} & L_{h1} + L_{\sigma 1} & -\frac{L_{h1}}{2} \\ -\frac{L_{h1}}{2} & -\frac{L_{h1}}{2} & L_{h1} + L_{\sigma 1} \end{bmatrix}. \tag{C.25}$$

Rotorseitiger Wicklungssatz

Ähnliche Zusammenhänge bestehen für den rotorseitigen Wicklungssatz, sodass die Matrix

$\boldsymbol{L}_2$ folgende Gestalt annimmt:

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} L_{h2} + L_{\sigma 2} & -\frac{L_{h2}}{2} & -\frac{L_{h2}}{2} \\ -\frac{L_{h2}}{2} & L_{h2} + L_{\sigma 2} & -\frac{L_{h2}}{2} \\ -\frac{L_{h2}}{2} & -\frac{L_{h2}}{2} & L_{h2} + L_{\sigma 2} \end{bmatrix}. \tag{C.26}$$

$\boldsymbol{L}_1$ und $\boldsymbol{L}_2$ sind symmetrisch und erfüllen somit die Reziprozitätsbedingung für gekoppelte magnetische Kreise [12].

C.2.5.3 Koppelinduktivitäten zwischen beiden Wicklungssätzen

Die obige Vorgehensweise kann prinzipiell zur Bestimmung der Koeffizienten der Matrizen $\boldsymbol{L}_{12}(\theta)$ sowie $\boldsymbol{L}_{21}(\theta)$ angewendet werden. In diesem Fall ist allerdings zu beachten, dass die Stränge auf dem Stator und dem Rotor unterschiedliche Windungszahlen besitzen und sich deren Lage zueinander durch den Winkel θ definiert. Darüber hinaus sind beide Wicklungssätze ausschließlich über das Luftspaltfeld miteinander verkoppelt.

Die sich daraus ergebenden Zusammenhänge sollen nachfolgend am Beispiel der Stränge A und U hergeleitet werden. Zu diesem Zweck wird davon ausgegangen, dass der durch den Strang A fließende Strom i_A eine radiale Feldverteilung nach Gl. (C.23) hervorruft. Für den Spezialfall, dass die Achsen der Stränge A und U übereinander liegen, d. h. $\theta = 0$, ergibt sich folglich der maximale Wert der Induktivität L_{AU}:

$$L_{AU}(0) = \frac{n_1 n_2}{R_{mh}} = \frac{n_2}{n_1} L_{h1}. \tag{C.27}$$

Für einen beliebigen Winkel θ ist zur Ermittlung des von i_A herrührenden magnetischen Flusses durch die Wicklungen des Strangs U zudem der Verlauf der radialen Feldkomponente nach (C.23) zu berücksichtigen. In Anlehnung an die in Abschnitt C.2.5.2 angestellten Analysen folgt:

$$L_{AU}(\theta) = \frac{n_2}{n_1} L_{h1} \cos\theta. \tag{C.28}$$

Die Herleitung der anderen Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{L}_{12}(\theta)$ erfolgt analog unter Berücksichtigung des Versatzes von 2/3 der Polteilung, welcher zwischen den einzelnen Strängen eines Wicklungssatzes besteht. Für die Matrix $\boldsymbol{L}_{12}(\theta)$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{L}_{12}(\theta) = \frac{n_2}{n_1} L_{h1} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{C.29}$$

Die Herleitung der Koeffizienten von $\boldsymbol{L}_{21}$ kann auf ähnliche Weise vorgenommen werden. Es

folgt:

$$\boldsymbol{L}_{21}(\theta) = \frac{n_2}{n_1} L_{h1} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{C.30}$$

und somit gilt:

$$\boldsymbol{L}_{21}(\theta) = \boldsymbol{L}_{12}^{\top}(\theta). \tag{C.31}$$

C.2.6 Raumzeigerdarstellung

C.2.6.1 Grundlegende Überlegungen

Die Gleichungen (C.3) und (C.4) sowie (C.7) und (C.8) modellieren das Grundwellenverhalten einer Drehfeldmaschine und bilden ein verkoppeltes System bestehend aus sechs linearen Differentialgleichungen:

$$\boldsymbol{u}_1 = R_1 \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{L}_1 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_1}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{L}_{12}(\theta) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_{12}(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \boldsymbol{i}_2 \tag{C.32a}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = R_2 \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{L}_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_2}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{L}_{21}(\theta) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_{21}(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \boldsymbol{i}_1 \tag{C.32b}$$

An dieser Stelle bietet sich eine Suche nach möglichen Vereinfachungen des Differentialgleichungssystems an. Zu diesem Zweck werden im Folgenden die räumlichen Zusammenhänge im Maschinenquerschnitt betrachtet, wenn lediglich der statorseitige Wicklungssatz vorhanden ist (vgl. Abb. C.4). Die in Abb. C.4 dargestellten Vektoren $\boldsymbol{e}_A$, $\boldsymbol{e}_B$ und $\boldsymbol{e}_C$ bezeichnen Einheitsvektoren der Wicklungsachsen der Stränge A, B und C, während die Basis ($\boldsymbol{e}_\alpha$, $\boldsymbol{e}_\beta$) ein kartesisches Koordinatensystem definiert, wobei davon ausgegangen wird, dass $\boldsymbol{e}_A = \boldsymbol{e}_\alpha$. Dieses Koordinatensystem wird folglich als „statorfestes“ oder (α, β)-Koordinatensystem bezeichnet. Die Lage eines Punktes im Luftspalt wird mit der Umfangskoordinate x_1 bzw. dem Winkel φ beschrieben.

Wie aus (C.23) hervorgeht, führt ein Strom i_A durch Strang A zu einer sinusförmigen Durchflutungsverteilung (bzw. einer sinusförmigen radialen Feldkomponente) im Luftspalt, die in der Wicklungsachse des Strangs A maximal ist. Bekanntlich ist die resultierende Durchflutung ϑ_A proportional zu i_A und es ergibt sich:

$$\vartheta_A = \beta i_A \cos\phi. \tag{C.33}$$

Ähnliches gilt für die von Strömen in den Strängen B und C herrührenden Durchflutungen:

$$\vartheta_B = \beta i_B \cos\left(\phi - 2\pi/3\right) \tag{C.34}$$

$$\vartheta_C = \beta i_C \cos\left(\phi + 2\pi/3\right). \tag{C.35}$$

Unter den in Abschnitt C.2.2 gemachten Annahmen und insbesondere den vorausgesetzten linearen magnetischen Verhältnissen ergibt sich die Verteilung der Gesamtdurchflutung ϑ zu einem Zeitpunkt t_0, welche aus den Strömen $i_A(t_0)$, $i_B(t_0)$ und $i_C(t_0)$ resultiert, aus der

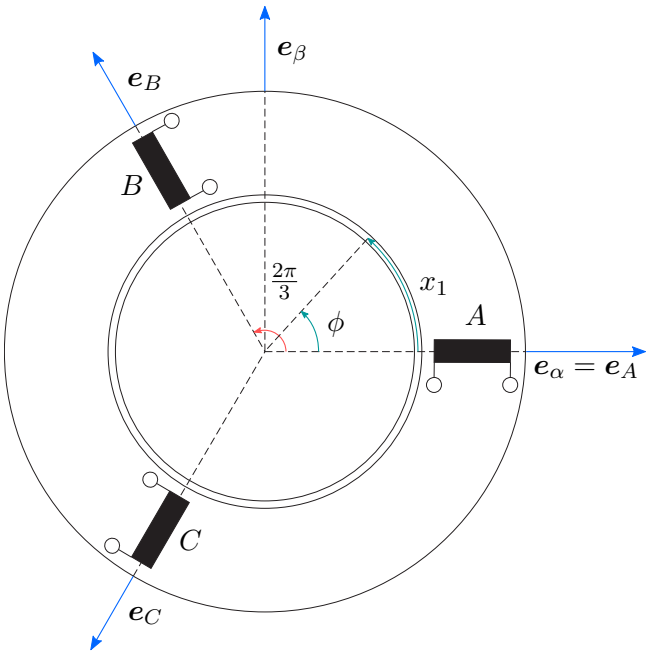


Abbildung C.4: *Schematische Darstellung der Maschine im Querschnitt mit statorseitigem Wicklungssatz und Definition der verwendeten Größen*

Summe der einzelnen Durchflutungsverteilungen ϑ_A, ϑ_B und ϑ_C:

$$\vartheta(t_0) = \beta \left(i_A(t_0) \cos\phi + i_B(t_0) \cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + i_C(t_0) \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) \right). \tag{C.36}$$

Die Durchflutungsverteilung $\vartheta(t_0)$ (bzw. die radiale Feldkomponente $B_r(t_0)$) weisen demnach ebenfalls eine räumliche Periode von 2π auf. Der Betrag von $\vartheta(t_0)$ ist maximal, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta(t_0)}{\mathrm{d}\phi} = 0. \tag{C.37}$$

Aus (C.36) und (C.37) folgt für den Winkel ϕ_0, für den die Extremwerte der Durchflutung $\vartheta(t_0)$ erreicht werden:

$$\cos\phi_0 \frac{\sqrt{3}}{2}(i_B - i_C) - \sin\phi_0 \left(i_A - \frac{1}{2}(i_B + i_C) \right) = 0. \tag{C.38}$$

Dieser Ausdruck kann auf folgende Weise dargestellt werden:

$$\left\| \begin{bmatrix} \cos\phi_0 \\ \sin\phi_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_A - \frac{1}{2}(i_B + i_C) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(i_B - i_C) \end{bmatrix} \right\| = 0. \tag{C.39}$$

Gleichung (C.39) kann entnommen werden, dass der Vektor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_1^s &= \begin{bmatrix} i_A - \frac{1}{2}(i_B + i_C) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(i_B - i_C) \end{bmatrix} = i_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + i_\beta \boldsymbol{e}_\beta \\ &= i_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i_B \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) \end{bmatrix} + i_C \begin{bmatrix} \cos(-2\pi/3) \\ \sin(-2\pi/3) \end{bmatrix} \\ &= i_A \boldsymbol{e}_A + i_B \boldsymbol{e}_B + i_C \boldsymbol{e}_C.\end{aligned}$$

die Punkte im Luftspalt bestimmt, an denen der Betrag der Durchflutung maximal ist. Schließlich genügt die Kenntnis der zwei Komponenten i_α und i_β, um den räumlichen Verlauf der Durchflutung bzw. die Feldverteilung im Luftspalt für einen gegebenen Zeitpunkt t_0 vollständig beschreiben zu können. Die Größe $\boldsymbol{i}_1^s$ wird als *Statorstromraumzeiger* bezeichnet. Hierbei weist das hochgestellte s darauf hin, dass die Größe im *statorfesten* Koordinatensystem ausgedrückt ist.

C.2.6.2 Clarke-Transformation

Die vorigen Überlegungen können durch Einführung folgender Transformation verallgemeinert werden:

$$\begin{array}{rccccc} \mathcal{T}_C: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & & \\ & \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} & \longmapsto & \mathcal{T}_C(\boldsymbol{x}) & = \boldsymbol{x}^s = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T_C} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix}. \end{array} \tag{C.40}$$

Hierbei lautet die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T_C}$:

$$\boldsymbol{T}_C = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(0) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(0) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{C.41}$$

$\mathcal{T}_C$ wird als *Clarke-Transformation* bezeichnet und ermöglicht, die in den Vektor $\boldsymbol{x}$ zusammengefassten Stranggrößen im allgemeinen Fall auf einen *Raumzeiger* $\boldsymbol{x}^s$ abzubilden.
Wird $\mathcal{T}_C$ auf beispielsweise den Stromvektor $\boldsymbol{i}_1 = \begin{bmatrix} i_A & i_B & i_C \end{bmatrix}^\top$ angewendet, ergibt sich der Stromraumzeiger $\boldsymbol{i}_1^s$:

$$\boldsymbol{i}_1^s = \mathcal{T}_C(\boldsymbol{i}_1) = \boldsymbol{T_C} \boldsymbol{i}_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} i_A - \frac{1}{2}(i_B + i_C) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(i_B - i_C) \\ \frac{1}{2}(i_A + i_B + i_C) \end{bmatrix}. \tag{C.42}$$

Die ersten zwei Zeilen des in (C.42) auftretenden Spaltenvektors entsprechen dem zuvor ermittelten Ausdruck von $\boldsymbol{i}_1^s$. Die dritte stellt den Mittelwert der Stranggrößen für den betrachteten Zeitpunkt dar und wird als *Gleichtaktkomponente* (engl. *zero sequence component*) bezeichnet. Der Faktor 2/3 dient lediglich der Normierung des Raumzeigers auf die Amplitude

der Stranggrößen.
Es kann leicht gezeigt werden, dass die Matrix $\boldsymbol{T_C}$ regulär ist und somit eine Rücktransformation des Raumzeigers $\boldsymbol{x}^s$ auf die zugehörigen Stranggrößen ermöglicht. Diese lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{T_C}^{-1}: \quad \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{x}^s = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} \quad &\longmapsto \quad \mathcal{T_C}^{-1}(\boldsymbol{x}^s) \quad = \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} = \boldsymbol{T_C}^{-1} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{C.43}$$

mit

$$\boldsymbol{T_C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}. \tag{C.44}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sowohl der Vektor der zusammengefassten Stranggrößen $\boldsymbol{x}$, als auch der Raumzeiger $\boldsymbol{x}^s$ aus *mathematischer* Sicht dreidimensionale Vektoren darstellen. Demnach entspricht die Clarke-Transformation einem Basiswechsel im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
Aus den Überlegungen im vorigen Abschnitt geht jedoch hervor, dass der Stromraumzeiger $\boldsymbol{i}_1^s$ die räumliche Verteilung der Durchflutungsgrundwelle im Luftspalt beschreibt und somit, im Gegensatz zum Vektor $\boldsymbol{i}_1$, eine besondere *physikalische* Bedeutung aufweist. Dieser Tatsache wird durch die unterschiedliche Schreibweise Rechnung getragen.

C.2.6.3 Anwendung der Clarke-Transformation zur Modellierung von Drehfeldmaschinen

Die Clarke-Transformation kann ebenfalls auf die Statorspannungssgleichung (C.3) angewendet werden. In diesem Fall ergibt sich:

$$\boldsymbol{T}_C \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1^s = \boldsymbol{T}_C R_1 \boldsymbol{i}_1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_1}{\mathrm{d}t} = R_1 \boldsymbol{T_C} \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{T_C} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_1}{\mathrm{d}t} = R_1 \boldsymbol{T_C} \boldsymbol{i}_1 + \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{T_C}\boldsymbol{\psi}_1)}{\mathrm{d}t}.$$

Daraus folgt die Statorspannungsgleichung in Raumzeigerdarstellung:

$$\boldsymbol{u}_1^s = R_1 \boldsymbol{i}_1^s + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_1^s}{\mathrm{d}t} \tag{C.45}$$

Die Analysen aus Abschnitt C.2.6.1 können problemlos auf den Rotorwicklungssatz erweitert werden. Hierbei ist allerdings eine neue kartesische Basis $(\boldsymbol{e}_{\alpha_r}, \boldsymbol{e}_{\beta_r})$ zu definieren, sodass der Vektor $\boldsymbol{e}_{\alpha_r}$ ein Einheitsvektor der Wicklungsachse des Strangs U darstellt (siehe Abb. C.5). Der Basis $(\boldsymbol{e}_{\alpha_r}, \boldsymbol{e}_{\beta_r})$ zugehörige Koordinatensystem wird als *rotorfestes* Koordinatensystem bzw. (d, q)-Koordinatensystem bezeichnet. Raumzeiger, die in diesem Koordinatensystem ausgedrückt sind, werden mit einem hochgestellten r gekennzeichnet. Unter Berücksichtigung dieser Zusammenhänge nimmt die Rotorspannungsgleichung (C.4) in Raumzeigerdarstellung folgende Gestalt an:

$$\boldsymbol{u}_2^r = R_2 \boldsymbol{i}_2^r + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_2^r}{\mathrm{d}t} \tag{C.46}$$

Magnetische Beziehungen

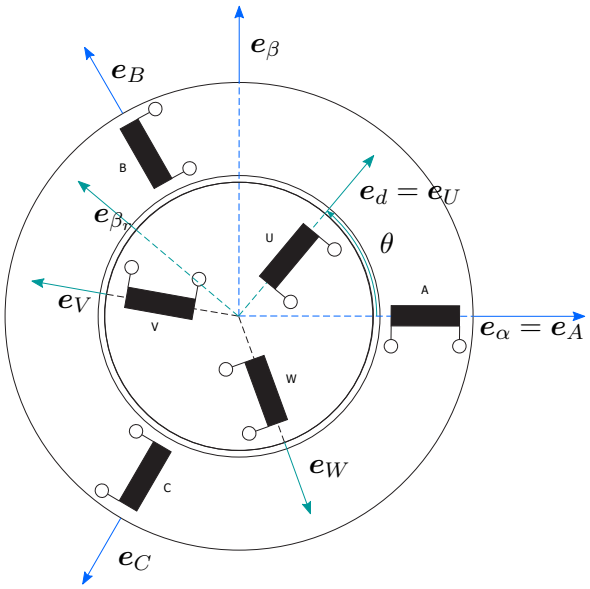


Abbildung C.5: *Definition des Rotorkoordinatensystems zur Anwendung der Clarke-Transformation auf den rotorseitigen Wicklungssatz*

Bei der Transformation der Statorflussverkettungsgleichungen (C.7) und (C.8) ist zu beachten, dass diese sowohl Stator-, als auch Rotorgrößen enthalten.
Die Transformation von (C.7) liefert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_C}\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{\psi}_1^s &= \boldsymbol{T_C}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{T_C}\boldsymbol{L}_{12}(\theta)\boldsymbol{i}_2 \\ &= \boldsymbol{T_C}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{T_C}^{-1}\boldsymbol{i}_1^s + \boldsymbol{T_C}\boldsymbol{L}_{12}(\theta)\boldsymbol{T_C}^{-1}\boldsymbol{i}_2^r. \end{aligned} \tag{C.47}$$

Mit den Bezeichungen $\boldsymbol{L}_1^s = \boldsymbol{T_C}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{T_C}^{-1}$ und $\boldsymbol{L}_{12}^s(\theta) = \boldsymbol{T_C}\boldsymbol{L}_{12}(\theta)\boldsymbol{T_C}^{-1}$ ergibt sich für den Raumzeiger der Statorflussverkettung

$$\boldsymbol{\psi}_1^s = \boldsymbol{L}_1^s\boldsymbol{i}_1^s + \boldsymbol{L}_{12}^s(\theta)\boldsymbol{i}_2^r \tag{C.48}$$

bzw. in ausgeschriebener Form nach Ausführen der Matrixmultiplikationen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \\ \psi_{01} \end{bmatrix} = &\begin{bmatrix} \frac{3}{2}L_{h1} + L_{\sigma1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_{h1} + L_{\sigma1} & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_{01} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{3}{2}\frac{n_2}{n_1}L_{h1} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{02} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{C.49}$$

Aus (C.49) geht hervor, dass zum einen die transformierte Matrix $\boldsymbol{L}_1^s$ diagonal ist und zum anderen, dass die dritte Komponente des Statorflussraumzeigers durch lediglich die Gleichtaktkomponenten der im statorseitigen Wicklungssatz fließenden Ströme bestimmt wird. Aus der Annahme, dass beide Wicklungssätze isolierte Sternpunkte besitzen, werden die Raumzeiger $\boldsymbol{i}_1^s$, $\boldsymbol{i}_2^r$ und folglich $\boldsymbol{\psi}_1^s$ vollständig durch ihre ersten zwei Komponenten beschrieben. Durch Einsetzen von (C.49) in die Statorspannungsgleichung (C.45) kann ebenfalls geschlos-

sen werden, dass einzig die Komponenten u_α und u_β ungleich Null sind.

Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass der Raumzeiger der Rotorflussverkettung die folgende Beziehung erfüllt:

$$\boldsymbol{\psi}_2^r = \boldsymbol{L}_2^r \boldsymbol{i}_2^r + \boldsymbol{L}_{21}^r(\theta)\boldsymbol{i}_1^s \tag{C.50}$$

wobei $\boldsymbol{L}_2^r = \boldsymbol{T_C} \boldsymbol{L}_2 {\boldsymbol{T_C}}^{-1}$ und $\boldsymbol{L}_{21}^r(\theta) = \boldsymbol{T_C} \boldsymbol{L}_{21}(\theta) {\boldsymbol{T_C}}^{-1}$.

In ausgeschriebener Form ergibt sich:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{02}\end{bmatrix} = &\begin{bmatrix}\frac{3}{2}L_{h2} + L_{\sigma 2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_{h2} + L_{\sigma 2} & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma 2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d \\ i_q \\ i_{02}\end{bmatrix} \\ &+ \frac{3}{2}\frac{n_2}{n_1}L_{h1}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\alpha \\ i_\beta \\ i_{01}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.51}$$

Hierbei besitzt die dritte Komponente aller auf den rotorseitigen Wicklungssatz bezogenen Raumzeiger auch keine Relevanz, sodass im weiteren Verlauf sämtliche Zusammenhänge zwischen Raumzeigern in dem von den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$ und $\boldsymbol{e}_\beta$ (bzw. $\boldsymbol{e}_{\alpha_r}$ und $\boldsymbol{e}_q$) aufgespannten Unterraum untersucht werden, d. h. die dritte Komponente wird nicht weiter betrachtet.

Mithilfe der Clarke-Transformation können demnach die linearen Kombinationen

$$i_A + i_B + i_C = 0$$

$$i_U + i_V + i_W = 0,$$

die zwischen den drei Strangströmen der jeweiligen Wicklungssätze bestehen, wenn deren Sternpunkt potentialfrei ist, zur Reduzierung der Modellordnung ausgenutzt werden.

Zusammenfassend ist das vereinfachte Gleichungssystem in ausgeschriebener Form wiedergegeben:

$$\begin{pmatrix}u_\alpha \\ u_\beta\end{pmatrix} = R_1\begin{pmatrix}i_\alpha \\ i_\beta\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \psi_\beta\end{pmatrix} \tag{C.52a}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \psi_\beta\end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}L_{h1} + L_{\sigma 1}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}i_\alpha \\ i_\beta\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\frac{n_2}{n_1}L_{h1}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}i_d \\ i_q\end{pmatrix} \tag{C.52b}$$

$$\begin{bmatrix}u_d \\ u_q\end{bmatrix} = R_1\begin{bmatrix}i_d \\ i_q\end{bmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\psi_d \\ \psi_q\end{bmatrix} \tag{C.53a}$$

$$\begin{bmatrix}\psi_d \\ \psi_q\end{bmatrix} = \left(\frac{3}{2}L_{h2} + L_{\sigma 2}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d \\ i_q\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\frac{n_2}{n_1}L_{h1}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_\alpha \\ i_\beta\end{bmatrix} \tag{C.53b}$$

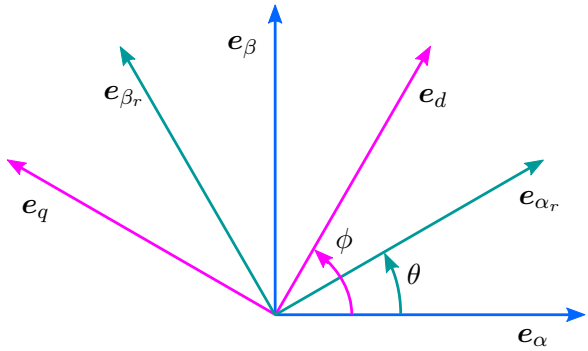


Abbildung C.6: *Definition eines neuen, um den Winkel φ gedrehten Koordinatensystems anhand der Transformation $\mathcal{T}_{\mathcal{P}\varphi}$*

Unter Verwendung der Definitionen

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{3}{2}L_{h1} + L_{\sigma 1} \\ L_2 &= \frac{3}{2}L_{h2} + L_{\sigma 2} \\ L_m &= \frac{3}{2}\frac{n_2}{n_1}L_{h1} \\ \boldsymbol{T}_P(\theta) &:= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ergibt sich in kompakter Darstellung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1^s &= R_1\boldsymbol{i}_1^s + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_1^s}{\mathrm{d}t} \\ \boldsymbol{\psi}_1^s &= L_1\boldsymbol{i}_1^s + L_m\boldsymbol{T}_P(\theta)\boldsymbol{i}_2^r \\ \boldsymbol{u}_2^r &= R_2\boldsymbol{i}_2^r + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_2^r}{\mathrm{d}t} \\ \boldsymbol{\psi}_2^r &= L_2\boldsymbol{i}_2^r + L_m\boldsymbol{T}_P(-\theta)\boldsymbol{i}_1^s \end{aligned} \tag{C.54}$$

Das Gleichungssystem vierter Ordnung (C.54) mit Raumzeigern ist äquivalent zu den ursprünglichen Gleichungen (C.3), (C.4), (C.7) und (C.8) mit Stranggrößen.

C.2.6.4 Rotierende Koordinatensysteme

Aus der Betrachtung der obigen Flussverkettungsgleichungen ist ersichtlich, dass die Drehmatrix $\boldsymbol{T}_P$ die Winkelabhängigkeit der Koppelinduktivität zwischen stator- und rotorseitigem Wicklungssatz ausdrückt.
Um die Zusammenhänge zu vertiefen und die Möglichkeit einer weiteren Vereinfachung des Modells zu erörtern, wird die nachstehende Transformation eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{P}\phi}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \boldsymbol{x}^k = \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} &\longmapsto \mathcal{T}_{\mathcal{P}\phi}(\boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{x}^s = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}_P(\varphi)\begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.55}$$

$\mathcal{T}_{\mathcal{P}\phi}$ beschreibt, ausgehend von der Basis $(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta)$, eine neue, um den Winkel ϕ gedrehte

Basis ($\boldsymbol{e}_d$, $\boldsymbol{e}_q$) (vgl. Abb C.6). Folglich ermöglicht diese Transformation, Raumzeiger nicht nur im stator- bzw. rotorfesten Koordinatensystem zu beschreiben, sondern auch in einem beliebigen, um die Maschinenachse rotierenden (d, q)-Koordinatensystem. Liegt der Ausdruck eines Raumzeigers $\boldsymbol{x}^k$ in diesem Koordinatensystem vor, entspricht $\mathcal{T}_\mathcal{P}(\boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{T}_P(\phi)\boldsymbol{x}^k$ seiner Darstellung im statorfesten Koordinatensystem (α, β). $\mathcal{T}_{\mathcal{P}\phi}$ wird in der Antriebstechnik als *Park-Transformation* bezeichnet.
Die Rotationsmatrix $\boldsymbol{T}_P$ ist regulär mit

$$\boldsymbol{T}_P(\phi)^{-1} = \boldsymbol{T}_P(\phi)^\top = \boldsymbol{T}_P(-\phi), \tag{C.56}$$

sodass die Rücktransformation ${\mathcal{T}_{\mathcal{P}\phi}}^{-1}$ existiert.
Sie ermöglicht, einen im (α, β)-Koordinatensystem angegebenen Raumzeiger in (d, q)-Koordinaten zu überführen. Für den Sonderfall $\phi = \theta$ entspricht $\mathcal{T}_{\mathcal{P}\theta}$ eine Transformation vom rotorfesten ins statorfeste Koordinatensystem. Für $\phi = -\theta$ ergibt sich hingegen eine Transformation vom stator- ins rotorfeste Koordinatensystem.
Somit ist ersichtlich, dass der Term $\boldsymbol{T}_P(\theta)\boldsymbol{i}_2^r$ im Gleichungssystem (C.54) dem Ausdruck des Rotorstromraumzeigers im statorfesten Koordinatensystem, $\boldsymbol{i}_2^s$, entspricht. Der Term $\boldsymbol{T}_P(-\theta)\boldsymbol{i}_1^s$ stellt dagegen den Statorstromraumzeiger in Rotorkoordinaten, $\boldsymbol{i}_1^r$, dar.
Folglich lässt sich die Winkelabhängigkeit der Koppelinduktivität im System (C.54) entfernen und die Gleichungen daher weiter vereinfachen:

$$\boldsymbol{u}_1^s = R_1\boldsymbol{i}_1^s + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_1^s}{\mathrm{d}t} \tag{C.57a}$$

$$\boldsymbol{\psi}_1^s = L_1\boldsymbol{i}_1^s + L_m\boldsymbol{i}_2^s \tag{C.57b}$$

$$\boldsymbol{u}_2^r = R_2\boldsymbol{i}_2^r + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_2^r}{\mathrm{d}t} \tag{C.57c}$$

$$\boldsymbol{\psi}_2^r = L_2\boldsymbol{i}_2^r + L_m\boldsymbol{i}_1^r \tag{C.57d}$$

Ist ein Raumzeiger in einem umlaufenden Koordinatensystem angegeben, ist bei der Berechnung dessen zeitlicher Ableitung die Produktregel zu beachten (vgl. $\boldsymbol{\psi}_2^r$ in (C.57c)). Für den allgemeinen Fall eines Raumzeigers $\boldsymbol{x}^k$ in einem beliebigen Koordinatensystem (k, l) gilt demnach:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^k(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{T}_P(\phi(t))^{-1}\boldsymbol{x}^s(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{T}_P(-\phi(t))\boldsymbol{x}^s(t)]}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}_P(-\phi(t))}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}^s(t) + \boldsymbol{T}_P(-\phi(t))\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^s(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{\phi})}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}^s(t) + \boldsymbol{T}_P(-\phi(t))\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^s(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \dot{\phi}\begin{bmatrix}-\sin\phi & \cos\phi \\ -\cos\phi & -\sin\phi\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^s(t) + \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^s(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= -\dot{\phi}\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^s(t) + \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^s(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= -\dot{\phi}\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}^s(t) + \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{\phi})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^s(t)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{C.58}$$

mit

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}_P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{C.59}$$

Wird (C.57c) mithilfe der Transformation $\mathcal{T}_{\mathcal{P}\theta}$ in das Statorkoordinatensystem überführt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_2^s &= \boldsymbol{T}_P(\theta)\boldsymbol{u}_2^r = R_2\boldsymbol{T}_P(\theta)\boldsymbol{i}_2^r + \boldsymbol{T}_P(\theta)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_2^r}{\mathrm{d}t} \\ &= R_2\boldsymbol{i}_2^s + \boldsymbol{T}_P(\theta)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}_P(-\theta)\boldsymbol{\psi}_2^s}{\mathrm{d}t} \\ &= R_2\boldsymbol{i}_2^s + \boldsymbol{T}_P(\theta)\left(-\omega\boldsymbol{T}_P(-\theta)\boldsymbol{J}\boldsymbol{\psi}_2^s + \boldsymbol{T}_P(-\theta)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_2^s}{\mathrm{d}t}\right) \quad \text{mit} \quad \omega = \dot{\theta} \\ &= R_2\boldsymbol{i}_2^s + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_2^s}{\mathrm{d}t} - \omega\boldsymbol{J}\boldsymbol{\psi}_2^s. \end{aligned} \tag{C.60}$$

(C.60) stellt die Rotorspannungsgleichung im statorfesten Koordinatensystem dar.

C.2.7 Umrechnung rotorbezogener Größen auf die Statorseite

Der Gleichungssatz (C.57) involviert u. a. die Parameter des rotorseitigen Wicklungssatzes R_2 und L_2, sowie die Koppelinduktivität L_m. Diese Größen sind jedoch in der Praxis nicht immer bestimmbar, beispielsweise, wenn die Klemmen des rotorseitigen Wicklungssatzes nicht zugänglich sind, wie im Falle von Asynchronmaschinen mit Kurzschlussläufern.
Um ein brauchbares Modell zu erhalten, ist aus diesem Grund eine Umformung von (C.57) nötig. Hierzu werden die Induktivitäten L_1 und L_2 wiederum in Haupt- und Streuanteil aufgespaltet und anschließend Ersatzgrößen eingeführt. Für die Rotorflussverkettungsgleichung (C.57d) gilt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_2^r &= L_2\boldsymbol{i}_2^r + L_m\boldsymbol{i}_1^r \\ &= \left(\frac{3}{2}L_{h2} + L_{\sigma 2}\right)\boldsymbol{i}_2^r + \frac{3}{2}\frac{n_2}{n_1}L_{h1}\boldsymbol{i}_1^r.\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $L_{h2} = \frac{n_2^2}{n_1^2}L_{h1}$ folgt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_2^r &= \left(\frac{3}{2}\frac{n_2^2}{n_1^2}L_{h1} + L_{\sigma 2}\right)\boldsymbol{i}_2^r + \frac{3}{2}\frac{n_2}{n_1}L_{h1}\boldsymbol{i}_1^r \\ \Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2}\boldsymbol{\psi}_2^r &= \left(\frac{3}{2}L_{h1} + \frac{n_1^2}{n_2^2}L_{\sigma 2}\right)\frac{n_2}{n_1}\boldsymbol{i}_2^r + \frac{3}{2}L_{h1}\boldsymbol{i}_1^r.\end{aligned}$$

Werden die Größen

$$\boldsymbol{\psi}_r^r := \frac{n_1}{n_2}\boldsymbol{\psi}_2^r \qquad L_{\sigma r} := \frac{n_1^2}{n_2^2}L_{\sigma 2} \qquad M := \frac{3}{2}L_{h1}$$

$$\boldsymbol{i}_r^r := \frac{n_2}{n_1}\boldsymbol{i}_2^r \qquad \boldsymbol{i}_s^r := \boldsymbol{i}_1^r \qquad L_r := M + L_{\sigma r}$$

definiert, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\boldsymbol{\psi}_r^r = (M + L_{\sigma r})\,\boldsymbol{i}_r^r + M\boldsymbol{i}_s^r = L_r\boldsymbol{i}_r^r + M\boldsymbol{i}_s^r = M\,(\boldsymbol{i}_r^r + \boldsymbol{i}_s^r) + L_{\sigma r}\boldsymbol{i}_r^r. \tag{C.61}$$

Der mit dem Verhältnis der Windungszahlen skalierte Raumzeiger der Rotorflussverkettung $\boldsymbol{\psi}_r^r$ besteht somit aus dem *Hauptflussanteil* $\boldsymbol{\psi}_h^r = M(\boldsymbol{i}_r^r + \boldsymbol{i}_s^r)$ und dem *Streuflussanteil* $\boldsymbol{\psi}_{\sigma r}^r = L_{\sigma r}\boldsymbol{i}_r^r$.

Wird $\boldsymbol{\psi}_r^r$ in die Rotorspannungsgleichung (C.57c) eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2^r &= R_2 \boldsymbol{i}_2^r + \frac{n_2}{n_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_r^r}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2} \boldsymbol{u}_2^r &= \frac{n_1^2}{n_2^2} R_2 \boldsymbol{i}_r^r + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_r^r}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Anhand der Definitionen

$$\boldsymbol{u}_r^r = \frac{n_1}{n_2} \boldsymbol{u}_2^r \quad \text{und} \quad R_r = \frac{n_1^2}{n_2^2} R_2$$

lässt sich (C.57c) wie folgt umschreiben:

$$\boldsymbol{u}_r^r = R_r \boldsymbol{i}_r^r + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_r^r}{\mathrm{d}t} \tag{C.62}$$

Ferner gilt für die statorseitige Flussverkettung in Statorkoordinaten:

$$\boldsymbol{\psi}_s^s = L_s \boldsymbol{i}_s^s + M \boldsymbol{i}_r^s = M \left(\boldsymbol{i}_s^s + \boldsymbol{i}_r^s \right) + L_{\sigma s} \boldsymbol{i}_s^s \tag{C.63}$$

mit

$$\boldsymbol{\psi}_s^s = \boldsymbol{\psi}_1^s \qquad R_s = R_1 \qquad L_s = M + L_{\sigma s}$$

Wiederum sind ein *Hauptflussanteil*, $\boldsymbol{\psi}_h^s = M(\boldsymbol{i}_r^s + \boldsymbol{i}_s^s)$, sowie ein *Streuflussanteil*, $\boldsymbol{\psi}_{\sigma s}^s = L_{\sigma s} \boldsymbol{i}_s^s$, zu erkennen.
Schließlich werden die elektromagnetischen Zusammenhänge im allgemeinen Grundwellenmodell der Drehfeldmaschine mithilfe der neuen Größen durch den nachstehenden Gleichungssatz beschrieben:

Statorspannung:	$\boldsymbol{u}_s^s = R_s \boldsymbol{i}_s^s + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_s^s}{\mathrm{d}t}$	(C.64a)
Statorflussverkettung:	$\boldsymbol{\psi}_s^s = L_s \boldsymbol{i}_s^s + M \boldsymbol{i}_r^s = M \left(\boldsymbol{i}_s^s + \boldsymbol{i}_r^s \right) + L_{\sigma s} \boldsymbol{i}_s^s$	(C.64b)
Rotorspannung:	$\boldsymbol{u}_r^r = R_r \boldsymbol{i}_r^r + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}_r^r}{\mathrm{d}t}$	(C.64c)
Rotorflussverkettung:	$\boldsymbol{\psi}_r^r = L_r \boldsymbol{i}_r^r + M \boldsymbol{i}_s^r = M \left(\boldsymbol{i}_s^r + \boldsymbol{i}_r^r \right) + L_{\sigma r} \boldsymbol{i}_r^r$	(C.64d)

Hierbei ist festzuhalten, dass die Größen L_s, L_r, R_r und M, im Gegensatz zu R_s, nicht den Wert der entsprechenden Stranggrößen annehmen. Somit stellt beispielsweise R_r nicht den tatsächlichen Widerstand eines rotorseitigen Strangs dar. Alle Parameterwerte können jedoch experimentell auf einfache Weise bestimmt werden, z. B. durch einen *Leerlaufversuch* und einen *Kurzschlussversuch* im Falle einer Asynchronmaschine (vgl. [18, 527]).
Im weiteren Verlauf und insbesondere bei der Herleitung des Signalflussplans der verallgemeinerten Drehfeldmaschine wird **ausschließlich** der Gleichungssatz (C.64) zur Beschreibung der elektromagnetischen Zusammenhänge herangezogen.

C.2.8 Momentenerzeugung und Mechanik

Die vorigen Überlegungen bezogen sich ausschließlich auf die Beschreibung des elektromagnetischen Verhaltens der Drehfeldmaschine. Der elektromagnetische Energiewandlungsprozess führt jedoch ebenfalls zur Entstehung eines Drehmoments m_M, welches sich auf den Rotor

auswirkt. Der Ausdruck dieses Drehmoments lässt sich aus einer Leistungsbilanz gewinnen und lautet:

$$m_M = \frac{3}{2} p \left(\boldsymbol{i}_s^s\right)^\top \boldsymbol{J} \boldsymbol{\psi}_s^s = \frac{3}{2} p \left(\psi_\alpha i_\beta - \psi_\beta i_\alpha\right), \tag{C.65}$$

wobei p die Polpaarzahl der Maschine darstellt.
Über eine Momentenbilanz kann der Zusammenhang zwischen der mechanischen Winkelgeschwindigkeit des Rotors ω_M, dem elektromagnetischen Drehmoment m_M sowie dem Lastmoment m_L abgeleitet werden:

$$\Theta_M \frac{\mathrm{d}\omega_M}{\mathrm{d}t} = m_M - m_L \tag{C.66}$$

Hierbei stellt Θ_M das Trägheitsmoment des Rotors dar. Bei Maschinen mit Polpaarzahl $p > 1$ ist zudem die Beziehung

$$\theta = p\,\theta_m$$

zwischen dem mechanischen Rotorwinkel θ_m und dem elektrischen Winkel θ zu beachten. Letzterer ist bei Koordinatentransformationen zwischen Stator und Rotor zu benutzen.

C.3 Wichtige Zusammenhänge

Wichtige Grundlage zum Verständnis von Drehfeldmaschinen ist die Zeigertheorie (engl. space vector theory). Hierzu siehe Abbildung C.7.

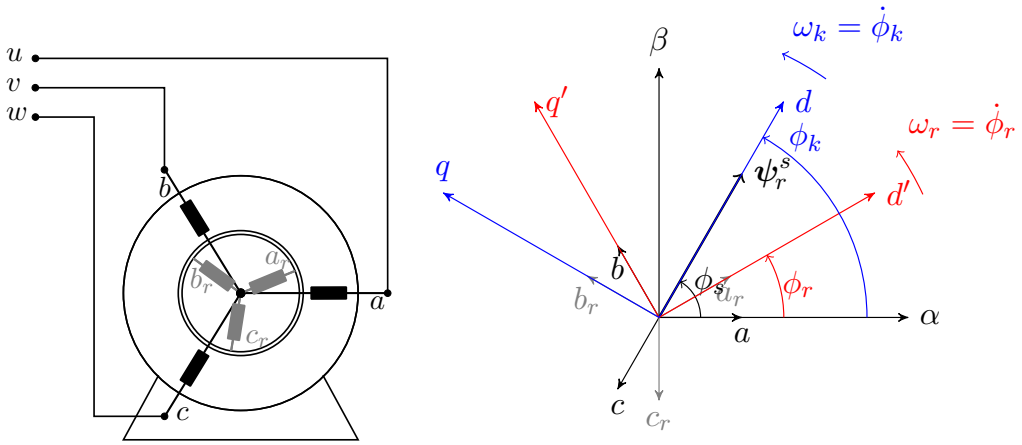


Abbildung C.7: *Zeigertheorie: Maschine mit Anschlussklemmen u, v, w, Stator-Wicklungen a, b, c und Rotor-Wicklungen a_r, b_r, c_r (links) und unterschiedliche Koordinatensysteme (rechts):*

- *3-phasiges Koordinatensystem* (a, b, c),
- *statorfestes s-Koordinatensystem* (α, β),
- *rotorfestes r-Koordinatensystem* (d', q') *und*
- *beliebiges k-Koordinatensystem* (d, q)

und Statorstrom $\boldsymbol{i}_s$ *mit Länge* $\|\boldsymbol{i}_s\| = \|\boldsymbol{i}_s^s\| = \sqrt{(i_s^\alpha)^2 + (i_s^\beta)^2} = \|\boldsymbol{i}_s^r\| = \left\|\boldsymbol{i}_s^k\right\|$ *mit entsprechenden Komponenten (z.B.* i_s^α *und* i_s^β *im Stator-Koordinatensystem).*

- **Clarke-Transformation von Stranggrößen $\boldsymbol{x}^{abc}$ in Statorgrößen $\boldsymbol{x}^s = \boldsymbol{T}_C \boldsymbol{x}^{abc}$ mit**

$$\boldsymbol{T}_C \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x^a \\ x^b \\ x^c \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}^{abc}} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x^\alpha \\ x^\beta \\ x^0 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}^s} := \underbrace{\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{T}_C \in \mathbb{R}^{3\times 3}} \begin{pmatrix} x^a \\ x^b \\ x^c \end{pmatrix} \tag{C.67}$$

  [Analogie zu D. Schröder: $\underline{a}^0 := e^{j\,0^\circ} = 1$, $\underline{a}^1 := e^{j\,120^\circ}$, $\underline{a}^2 := e^{j\,240^\circ}$]

  wobei $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{\psi}_r, \boldsymbol{\psi}_s, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{i}_s, \dots\}$. $\boldsymbol{T}_C$ ist regulär mit inverser Matrix

$$\boldsymbol{T}_C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{d.h.} \qquad \boldsymbol{x}^{abc} = \boldsymbol{T}_C^{-1} \boldsymbol{x}^s. \tag{C.68}$$

  Oft wird die Nullkomponente x^0 vernachlässigt (z.B. gilt $i^0 = 0 = i_a + i_b + i_c$ bei Sternschaltung), dann vereinfachen sich die Clarke-Transformationsmatrizen zu

$$\boldsymbol{T}_C = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{T}_C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

- **Park-Transformation von Statorgrößen $\boldsymbol{x}^s$ in beliebig umlaufendes Koordinatensystem (z.B. rotorfestes (d', q')-KoSy oder rotorflussfestes (d, q)-KoSy)**
  Zur Vereinfachung wird die Nullkomponente (zero-sequence) x^0 in Statorgrößen vernachlässigt

$$\boldsymbol{T}_P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \phi \mapsto \boldsymbol{T}_P(\phi) := \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad [\text{Analogie zu D. Schröder: } e^{j\,\phi}] \tag{C.69}$$

  wobei $\boldsymbol{T}_P(\phi)$ regulär für alle $\phi \in \mathbb{R}$ mit inverser Matrix

$$\boldsymbol{T}_P(\phi)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_P(\phi)^\top = \boldsymbol{T}_P(-\phi). \qquad [\text{Analogie zu D. Schröder: } e^{-j\,\phi}] \tag{C.70}$$

  Es gilt entsprechend

$$\boldsymbol{T}_P(-\phi)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_P(-\phi)^\top = \boldsymbol{T}_P(\phi). \tag{C.71}$$

  Mithilfe der trigonometrischen Sätze folgt

$$\forall\, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}\colon \ \boldsymbol{T}_P(\phi_1)\boldsymbol{T}_P(\phi_2) = \boldsymbol{T}_P(\phi_1 + \phi_2). \qquad [\text{Analogie zu D. Schröder: } e^{j\,(\phi_1+\phi_2)}] \tag{C.72}$$

Für $\phi = \pi/2$ gilt

$$\boldsymbol{J} := \boldsymbol{T}_P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{[Analogie zu D. Schröder: } e^{j\frac{\pi}{2}}\text{]} \tag{C.73}$$

was einer (positiven) Drehung um $\pi/2$ eines Vektors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ entspricht.
Die Matrizen $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{T}_P(\phi)$ kommutieren, d.h.

$$\forall \phi \in \mathbb{R}\colon \qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{T}_P(\phi) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_P(\phi)\boldsymbol{J}, \tag{C.74}$$

[Analogie zu D. Schröder: $e^{j(\frac{\pi}{2}+\phi)} = e^{j(\phi+\frac{\pi}{2})} = je^{j\phi}$].

Für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\phi =: \omega$ gilt

$$\dot{\boldsymbol{T}}_P(\phi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{T}_P(\phi) = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix} = \omega\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}_P(\phi) = \omega\,\boldsymbol{T}_P(\phi)\boldsymbol{J} \tag{C.75}$$

[Analogie zu D. Schröder: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,e^{j\phi} = j\omega\,e^{j\phi} = \omega e^{j(\frac{\pi}{2}+\phi)} = \omega e^{j(\phi+\frac{\pi}{2})}$]

und

$$\dot{\boldsymbol{T}}_P(\phi)^{-1} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{T}_P(\phi)^{-1} = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix} = -\omega\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}_P(\phi)^{-1} = -\omega\,\boldsymbol{T}_P(\phi)^{-1}\boldsymbol{J} \tag{C.76}$$

[Analogie zu D. Schröder: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,e^{-j\phi} = -j\omega\,e^{-j\phi}$]

Mit der Konvention $\phi_k = \phi$ lässt sich mithilfe der Park-Transformation $\boldsymbol{T}_P(\phi_k)$ ausgehend von einem statorfesten Koordinatensystem (α, β) in ein (beliebiges) umlaufendes k-Koordinatensystem (d, q) (Superskript $\boldsymbol{x}^k = (x^d,\, x^q)^\top$) übergegangen werden

$$\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{T}_P(-\phi_k)\boldsymbol{x}^s = \boldsymbol{T}_P(\phi_k)^{-1}\boldsymbol{x}^s \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x}^s = \boldsymbol{T}_P(\phi_k)\boldsymbol{x}^k, \tag{C.77}$$

z.B. zur **Rotorfluss-Orientierung** (d.h. $\psi_r^q = \dot{\psi}_r^q = 0$ und $\psi_r^d = \|\boldsymbol{\psi}_r^r\| = \left\|\boldsymbol{\psi}_r^k\right\|$, der Rotorfluss im k-Koordinatensystem liegt 'exakt' auf der d-Achse).

Anhang D

Grundlagen der Regelungstechnik (siehe [7, 16–18])

D.1 Wichtige Zusammenhänge

Im Folgenden werden stichpunktartig wichtige Zusammenhänge der linearen Regelungstheorie zusammengefasst.

- **Lösungsformel für** $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{ac}{b^2}}\right) \quad \text{für } a, b, c \in \mathbb{R} \tag{D.1}$$

- **Rechenregeln für Logarithmus zur Basis** x

$$\log_x(a \cdot b^c) = \log_x(a) + c\log_x(b) \quad \text{für } a, b, c, x \in \mathbb{R} \tag{D.2}$$

- **Komplexe Rechnung**

$$s = \sigma + j \cdot \omega = |s|\exp(j\angle s) \in \mathbb{C} \quad \text{für } \sigma, \omega \in \mathbb{R} \tag{D.3}$$

wobei $s^* := \sigma - j \cdot \omega$, $|s| = \sqrt{s^* s} = \sqrt{\Re\{s\}^2 + \Im\{s\}^2}$ und $\tan\angle s = \frac{\Im\{s\}}{\Re\{s\}}$. Dann

$$\angle s = \arctan\left(\frac{\Im\{s\}}{\Re\{s\}}\right) + \begin{cases} 0 & , \Im\{s\} \geq 0 \wedge \Re\{s\} \geq 0 \\ \pi & , (\Im\{s\} < 0 \vee \Im\{s\} > 0) \wedge \Re\{s\} \leq 0 \\ 2\pi & , \Im\{s\} \leq 0 \wedge \Re\{s\} \geq 0. \end{cases} \tag{D.4}$$

- **Laplace-Transformation** $x(s) = \int_0^\infty x(t)\exp(-st)dt$ **(oder kurz** $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, x(s)$**)**

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$ gilt:

$$\dot{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sx(s) - x(0+)^* \tag{D.5}$$

$$\ddot{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2x(s) - sx(0+) - \dot{x}(0+)^* \tag{D.6}$$

$$\sigma(t-T) = \begin{cases} 1 & ,t \geq T \\ 0 & ,t < T \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{e^{-sT}}{s} \tag{D.7}$$

$$t^n \,, n \in \mathbb{N}_0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{D.8}$$

$$\frac{1}{a-b}(\exp(-bt) - \exp(-at)) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(s+a)(s+b)} \tag{D.9}$$

$$\exp(-at)\cos(bt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \tag{D.10}$$

$$\frac{1}{b}\exp(-at)\sin(bt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(s+a)^2+b^2} \tag{D.11}$$

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{(a-b)^2}\Big(\exp(-at) - \exp(-bt) + (a-b)t\exp(-bt)\Big) \tag{D.12}$$

- **Faltungsregel für Impulsantworten $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ und $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$**

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)G(s) \tag{D.13}$$

- **Additivität von Betrag (in [dB]) und Phase im Bode-Diagramm**

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) \cdot \ldots \cdot F_n(j\omega) \\ &= |F_1(j\omega)|\exp(j\angle F_1(j\omega)) \cdot \ldots \cdot |F_n(j\omega)|\exp(j\angle F_n(j\omega)) \end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned} |F(j\omega)|_{dB} &= 20\log(|F_1(j\omega)| \cdot \ldots \cdot |F_n(j\omega)|) \\ &= 20\log(|F_1(j\omega)|) + \ldots + 20\log(|F_n(j\omega)|) \\ &= |F_1(j\omega)|_{dB} + \ldots + |F_n(j\omega)|_{dB} \end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\angle F(j\omega) = \angle F_1(j\omega) + \ldots + \angle F_n(j\omega) \tag{D.16}$$

- **Standardreglerstrukturen**
  P-Regler:

$$u(t) = V_R\, e(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_P(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = V_R \tag{D.17}$$

PI-Regler:

$$u(t) = V_R\left(e(t) + \frac{1}{T_n}\int e(t)dt\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_{PI}(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = V_R\left(1 + \frac{1}{sT_n}\right) = V_R\left(\frac{1+sT_n}{sT_n}\right) \tag{D.18}$$

PD-Regler:

$$u(t) = V_R\,(e(t) + T_v\dot{e}(t)) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_{PD}(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = V_R\,(1 + sT_v) \tag{D.19}$$

PID-Regler:

$$u(t) = V_R\left(e(t) + T_v\dot{e}(t) + \int \frac{e(t)}{T_n}dt\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_{PID}(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = V_R\left(1 + sT_v + \frac{1}{sT_n}\right)$$
$$= V_R\left(\frac{1 + sT_n + s^2T_vT_n}{sT_n}\right) \tag{D.20}$$

- **Anfangs- und Endwertsätze für** $F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$
  Wenn die Endwerte $\lim_{t\to 0+} y(t)$, $\lim_{t\to\infty} y(t)$ und $\lim_{t\to 0} \dot{y}(t)$ existieren und endlich sind, dann gilt

$$\lim_{t\to 0+} y(t) = \lim_{s\to\infty}(sF(s)u(s)) \quad \text{für } \deg(Z) < \deg(N) \tag{D.21}$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}(sF(s)u(s)) \tag{D.22}$$
$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty}(s^2F(s)u(s)) \tag{D.23}$$

  wobei $\deg(Z)$ und $\deg(N)$ die Ordnung des Zähler- bzw. Nennerpolynoms beschreiben.

- **Stabilität von linearen Regelkreisen**
  Ein Regelkreis der Ordnung $m, n \in \mathbb{N}_0$, $V_S \in \mathbb{R}$, $c_0, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit der Übertragungsfunktion

$$F_S(s) = \frac{y(s)}{u(s)} := V_S\frac{Z(s)}{N(s)} = V_S\frac{c_0 + c_1s + \cdots + c_{m-1}s^{m-1} + s^m}{a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \quad \text{mit } m \le n \tag{D.24}$$

  zwischen Eingang $u(s)$ und Ausgang $y(s)$ ist (exponentiell) stabil (d.h. Systemantwort klingt ab), wenn alle Pole λ_i von $F_S(s)$, d.h. alle Nullstellen des Nennerpolynoms $N(\lambda_i) = 0$ negativen Realteil $\Re\{\lambda_i\} < 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ besitzen.

- **Routh-Hurwitz Stabilitätskriterium für lineare Regelkreise**
  Dazu untersucht man das charakteristische Polynom n-ter Ordnung des LTI Systems

$$N(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_ns^n, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}. \tag{D.25}$$

  Das charakteristische Polynom entspricht dem Nennerpolynom der Übertragungsfunktion $F_S(s)$ in (D.24). Es gilt: $N(s)$ *ist* ein Hurwitz-Polynom (d.h. System ist exponentiell stabil),

  (i) *dann* sind alle Koeffizienten $a_i > 0$ in $N(s)$ (notwendige Bedingung, d.h. nicht unbedingt ausreichend!);

  (ii) *genau dann, wenn* der Koeffizient $a_n > 0$ und *alle* nordwestlichen Hurwitz-Unterdeterminanten $D_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ (notwendige & hinreichende Bedingung)[1]

  Die Unterdeterminanten D_i entstehen aus den Determinanten der entsprechenden (i, i)-

[1] Falls alle Koeffizienten $a_i > 0$ kann über das Liénard-Chipart-Kriterium die Anzahl der zu untersuchenden Determinaten reduziert werden. Es müssen lediglich die Determinanten D_i mit ungeradem Index $i = 1, 3, 5, \ldots$ *oder* geradem Index $i = 2, 4, 6, \ldots$ auf *Positivität* geprüft werden. Dieser Sachverhalt basiert auf der linearen Abhängigkeit der Determinaten für $a_i > 0$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Untermatrizen in der linken oberen ("nordwestlichen") Ecke der Koeffizienten-Matrix

$$\boldsymbol{M}_n = \left[\begin{array}{c|c|c|ccc} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_{n-2n+3} & a_{n-2n+1} \\ \hline a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_{n-2n+4} & a_{n-2n+2} \\ \hline 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_{n-2n+5} & a_{n-2n+3} \\ \hline 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & a_{n-2n+6} & a_{n-2n+4} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_2 & a_0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{D.26}$$

Zu untersuchen sind $D_1 = a_{n-1}$ und $D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$, etc. Es gilt $a_{-k} = 0$ für $k > 0$.

- **Kausalität (Realisierbarkeit)**
  Ein lineares dynamisches System $F_S(s) = \frac{y(s)}{u(s)} := V_S \frac{Z(s)}{N(s)} = V_S \frac{c_0+c_1 s+\dots+c_{m-1}s^{m-1}+s^m}{a_0+a_1 s+\dots+a_{n-1}s^{n-1}+s^n}$ wird kausal genannt, wenn $m \leq n$. Die Systemantwort $y(t)$ eines kausalen Systems hängt lediglich vom (vorangegangenen) Verlauf der Eingangsgröße $u(\tau)$ mit $0 \leq \tau \leq t$ ab.

- **Zustandsdarstellung eines LTI[1] Systems (Regelungsnormalform)**
  Zustandsgleichung (Vektordifferentialgleichung) und Ausgangsgleichung eines dynamischen Systems n-ter Ordnung

$$\left.\begin{array}{rcll} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) & , \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) & = & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}(t) & \end{array}\right\} \tag{D.27}$$

  mit

  - dem Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)^\top \in \mathbb{R}$ (z.B. Motorstrom & -drehzahl)
  - der Stellgröße $u(t) \in \mathbb{R}$ (z.B. Motorspannung oder -moment)
  - der Systemmatrix in **Regelungsnormalform** (RNF)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{D.28}$$

  - dem Steuer-/Einkoppelvektor $\boldsymbol{b} = \big(0, \dots, 0, V_S\big)^\top \in \mathbb{R}^n$
  - dem Auskoppel-/Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}^\top = \big(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\big) \in \mathbb{R}^n$

- **Übertragungsfunktion (aus Regelungsnormalform)**
  Darstellung im Laplace-Bereich mit $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ ergibt

$$F_S(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \boldsymbol{c}^\top \left(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{b} = V_S \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \tag{D.29}$$

[1] linearen, zeit-invarianten (engl. linear, time-invariant)

- **Stabilität eines LTI Systems in Zustandsdarstellung** (D.27)

Ein System der Form (D.27) ist

- für jeden Anfangswert $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (exponentiell) stabil und
- für jeden Anfangswert $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und jeden beschränkten Eingang $u(\cdot)$ bounded-input, bounded-output (BIBO) stabil,

wenn alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ negativen Realteil besitzen, d.h. $\Re\{\lambda_i\} < 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Die Eigenwerte können durch Nullsetzen der charakteristischen Gleichung $\chi_{\boldsymbol{A}}(s) := \det(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = 0$ bestimmt werden. Hierbei entspricht $\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der Einheitsmatrix der Ordnung n. Die Eigenwerte λ_i sind identisch mit den Polen der Übertragungsfunktion (D.29).

D.2 Wiederholungsaufgaben

D.2.1 Standardstrecken anhand der Gleichstrommaschine (GM)

Eine nennerregte GM mit konstantem Nennfluss $\psi_{EN} > 0$ [Vs] ist im Zeitbereich gegeben durch

$$u_A(t) = e_A(t) + R_A i_A(t) + L_A \frac{di_A(t)}{dt}, \qquad i_A(0) = 0 \text{ [A]} \tag{D.30}$$

$$e_A(t) = C_M \cdot \psi_{EN} \cdot \omega_M(t) \tag{D.31}$$

$$\frac{d\omega_M(t)}{dt} = \frac{1}{\Theta_M}\left(m_M(t) - m_L(t)\right), \qquad \omega_M(0) = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \tag{D.32}$$

$$m_M(t) = C_M \cdot \psi_{EN} \cdot i_A(t). \tag{D.33}$$

Hierbei sind u_A [V] die Ankerspannung (Stelleingang), i_A [A] der Ankerstrom, R_A [Ω] der Ankerwiderstand, L_A $\left[\frac{\text{Vs}}{\text{A}}\right]$ die Ankerinduktivität, e_A [V] die (induzierte) Gegenspannung, C_M [1] die Motorkonstante, ω_M $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ die Motorwinkelgeschwindigkeit, Θ_M $\left[\text{kg m}^2\right]$ die (Rotor-)Trägheit, m_M [Nm] das Motormoment und m_L [Nm] das Lastmoment (Störung bzw. Reibung).

Aufgabe D.2.1 (Elektrischer Ankerkreis der GM (PT_1-Strecke))**.**

(a) Für $e_A := 0$ transformieren Sie Gleichung (1) des Ankerkreises in den Frequenzbereich (Laplace-Transformation) und leiten die Übertragungsfunktion $F_{PT_1}(s) = \frac{i_A(s)}{u_A(s)}$ her! (Hinweis: Nutzen Sie die B.3!)

(b) Für $s = j\omega$ (Fourieranalyse) bilden Sie Betrag $|F_{PT_1}(j\omega)|_{dB} := 20\log|F_{PT_1}(j\omega)|$ und Phase $\angle F_{PT_1}(j\omega)$ der Übertragungsfunktion $F_1(s) = \frac{i_A(s)}{u_A(s)}$!

(c) Für die Ankerzeitkonstante $T_A := L_A/R_A$ werten Sie Betrag und Phase an den markanten Frequenzen $\omega \in \{0, \frac{1}{10\,T_A}, \frac{1}{T_A}, \frac{10}{T_A}\}$ aus!

(d) Skizzieren Sie das Bodediagramm von $F_{PT_1}(j\omega)$!

(e) Berechnen Sie die Sprungantwort des Ankerkreises für

$$u_A(t) = u_0\sigma(t) = \begin{cases} u_0, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

mit $u_0 > 0$. (Hinweis: Nutzen Sie die Laplace-Rücktransformation und die Laplace-Transformierte $u_0\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{u_0}{s}$)!

(f) Für welche Ankerzeitkonstanten $T_A \in \mathbb{R}$ (theoretisch) ist Ankerkreis (1) stabil, grenzstabil und instabil?

(g) Berechnen Sie Anfangswert $\lim_{t\to 0} i_A(t)$, Anfangssteigung $\lim_{t\to 0} \dot{i}_A(t)$ und Endwert $\lim_{t\to\infty} i_A(t)$ für einen Einheitssprung $u_A(t) = \sigma(t)$ mithilfe der Anfangs- und Endwertsätze (siehe B.3)!

Aufgabe D.2.2 (Mechanik der GM (I-Strecke))**.**

(a) Für $m_L := 0$ transformieren Sie Gleichung (3) der Mechanik in den Frequenzbereich (Laplace-Transformation) und leiten die Übertragungsfunktion $F_I(s) = \frac{\omega_M(s)}{m_M(s)}$ her! (Hinweis: Nutzen Sie die B.3!)

(b) Für $s = j\omega$ (Fourieranalyse) bilden Sie Betrag $|F_I(j\omega)|_{dB} := 20\log|F_I(j\omega)|$ und Phase $\angle F_I(j\omega)$ der Übertragungsfunktion $F_I(s) = \frac{\omega_M(s)}{m_M(s)}$!

(c) Skizzieren Sie das Bodediagramm von $F_I(j\omega)$! (Hinweis: Überlegen Sie sich die Steigung des Betrages und wählen eine "einfache" Frequenz als Startwert!)

(d) Berechnen Sie die Sprungantwort der Mechanik für $m_M(t) = m_0\sigma(t)$ für $m_0 > 0$! (Hinweis: Lösen Sie hier die Differential (3) direkt!)

(e) Ist $F_I(s)$ stabil?

(f) Berechnen Sie Anfangswert $\lim_{t\to 0} \omega_M(t)$, Anfangssteigung $\lim_{t\to 0} \dot{\omega}_M(t)$ und Endwert $\lim_{t\to\infty} \omega_M(t)$ für einen Einheitssprung $m_M(t) = \sigma(t)$ mithilfe der Anfangs- und Endwertsätze (siehe B.3)!

Aufgabe D.2.3 (Elektromechanische Systemantwort der GM (PT_2-Strecke))**.**

(a) Für $m_L = 0$ leiten Sie aus den Systemgleichungen (1)-(4) die elektromechanische Systemantwort der GM her! Hinweis: Leiten Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\omega}_M(t) + \frac{2D}{\omega_0}\dot{\omega}_M(t) + \omega_M(t) = V_S\, u_A(t), \qquad (\omega_M(0), \dot{\omega}_M(0)) = (0,0). \tag{D.34}$$

her. Hierbei sind $V_S \in \mathbb{R}$ [1/(Vs)], $\omega_0 > 0$ [rad/s] und $D \geq 0$ [1] abhängig von den Systemparametern C_M, ψ_{EN}, T_A, L_A, R_A und Θ_M!

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $F_{PT_2}(s) = \frac{\omega_M(s)}{u_A(s)}$ von (D.34)! (Hinweis: Laplace-Transformation)

(c) Für $s = j\omega$ (Fourieranalyse) bilden Sie Betrag $|F_{PT_2}(j\omega)|_{dB} := 20\log|F_{PT_2}(j\omega)|$ und Phase $\angle F_{PT_2}(j\omega)$ der Übertragungsfunktion $F_{PT_2}(s) = \frac{\omega_M(s)}{u_A(s)}$!

(d) Für Eigenfrequenz ω_0 werten Sie Betrag und Phase an den markanten Frequenzen $\omega \in \{0, \omega_0/10, \omega_0, 10\omega_0\}$ aus!

(e) Skizzieren Sie das Bodediagramm von $F_{PT_2}(j\omega)$! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe von Matlab (für $D = 0.1$, $V_S = 1$, $\omega_0 = 10$)! (Hinweis: Nutzen Sie den Befehl `bode(sys)`.)

(f) *Bestimmen Sie die Pole $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ der Übertragungsfunktion $F_{PT_2}(s)$!*

(g) *Für welche Werte von D, ω_0 und V_S ist das System (D.34) stabil, d.h. $\Re\{p_1\}, \Re\{p_2\} < 0$?*

(h) *Bestimmen Sie die Sprungantwort von (D.34) für $u_A(t) = u_0\sigma(t)$ mit $u_0 > 0$! (Tipp: Nutzen Sie die Laplace-Rücktransformation)*

(i) *Für welche Werte von D, ω_0 und V_S ist das System (D.34) schwingungsfähig? Nutzen Sie Simulink/Matlab zur Simulation des Systems (D.34) für unterschiedliche Werte von $D \in \{0.01, 0.1, 1, 5\}$, $V_S \in \{-0.1, 3\}$ und $\omega_0 \in \{0.5, 1, 10\}$!*

(j) *Berechnen Sie Anfangswert $\lim_{t\to 0} \omega_M(t)$, Anfangssteigung $\lim_{t\to 0} \dot{\omega}_M(t)$ und Endwert $\lim_{t\to\infty} \omega_M(t)$ für einen Einheitssprung $u_A(t) = \sigma(t)$ mithilfe der Anfangs- und Endwertsätze (siehe B.3)!*

(k) *Im Folgenden gelte $D = 1$.*

- *Zerlegen Sie das System (D.34) in zwei PT_1 Systeme mit Übertragungsfunktion $F_{PT_i} = \frac{V_{S,i}}{1+s\,T_i}$, $i = 1, 2$?*
  Ist die Zerlegung eindeutig, d.h. sind die Zeitkonstanten T_1 und T_2 bzw. $V_{S,1}$ und $V_{S,2}$ eindeutig?
- *Sind beide Systeme F_{PT_1} und F_{PT_2} stabil?*

D.2.2 Regelkreise und Reglerauslegung

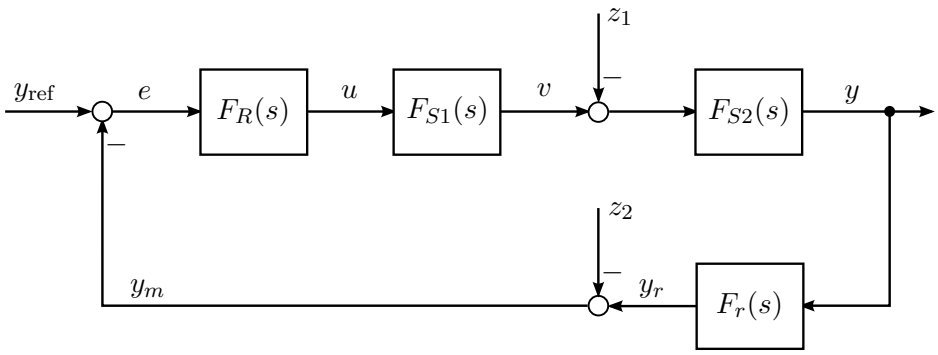


Abbildung D.1: *Standardregelkreis (SISO)*

Aufgabe D.2.4 (Serienschaltung PT_1-Strecke und I-Strecke (IT_1-Strecke))**.**

(a) *Wie lautet die Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ von Eingang $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, u(s)$ zu Ausgang $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, y(s)$ für $z_1 = 0$ (keine Störung innerhalb der Strecke) entsprechend dem Regelkreis in Abb. D.1?*

(b) *Stellen Sie die Übertragungsfunktion $F_{IT_1}(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ einer allgemeinen IT_1-Strecke auf, indem Sie eine PT_1-Strecke $F_{PT_1}(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = \frac{V_{S,1}}{1+s\,T_{S,1}}$ und eine I-Strecke $F_I(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{V_{S,2}}{s\,T_{S,2}}$ in Serie verschalten!*

(c) *Für $s = j\omega$ (Fourieranalyse) bilden Sie Betrag $|F_{IT_1}(j\omega)|_{dB} := 20\log|F_{IT_1}(j\omega)|$ und Phase $\angle F_{IT_1}(j\omega)$ der Übertragungsfunktion $F_{IT_1}(s)$! (Hinweis: Nutzen Sie hierzu Additivität von Betrag und Phase!)*

(d) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm von $F_{IT_1}(j\omega)$!

(e) Berechnen Sie die Sprungantwort von $F_{IT_1}(s)$ für $u(t) = u_0\sigma(t)$ mit $u_0 > 0$ (d.h. $u(s) = u_0/s$)!

(f) Ist $F_{IT_1}(s)$ stabil?

(g) Berechnen Sie Anfangswert $\lim_{t\to 0} y(t)$, Anfangssteigung $\lim_{t\to 0} \dot{y}(t)$ und Endwert $\lim_{t\to\infty} y(t)$ für einen Einheitssprung $u(t) = \sigma(t)$ mithilfe der Anfangs- und Endwertsätze (siehe B.3)!

Aufgabe D.2.5 (Regelkreisanalyse)**.**

(a) Bestimmen Sie die Führungsübertragungsfunktion $F_{y_{\text{ref}}}(s) = \frac{y(s)}{y_{\text{ref}}(s)}$ des Regelkreises in Abb. D.1!

(b) Bestimmen Sie die Störübertragungsfunktionen $F_{z_1}(s) = \frac{y(s)}{z_1(s)}$ und $F_{z_2}(s) = \frac{y(s)}{z_2(s)}$ des Regelkreises in Abb. D.1!

(c) Wie lautet das gesamte Übertragungsverhalten des Regelkreises? Bestimmen Sie hierzu $y(s) = f(y_{\text{ref}}(s), z_1(s), z_2(s))$!

(d) Wie können Sie Stabilität des Regelkreises überprüfen? Was fällt Ihnen auf?

(e) Welche Teilstrecke in Abb. D.1 können Sie normalerweise problemlos vorgeben/ändern?

(f) Welche der Störungen $z_1(s)$ und $z_2(s)$ können Sie nicht unterdrücken, sofern ein gutes Führungsverhalten gewünscht wird?

Aufgabe D.2.6 (Vorsteuerung und Störgrößenaufschaltung)**.**
Nehmen Sie an, dass Störung $z_1(t)$ als Messgröße (oder Schätzwert) und Referenz $y_{\text{ref}}(t)$ als (zeitvariante) Signale vorliegen und als Stelleingriff ihres Systems $F_{S1}(s)F_{S2}(s)$ nur $u(t)$ zugänglich ist.

(a) Nutzen Sie die Information des Referenzsignals $y_{\text{ref}}(t)$ um Ihren Regler zu entlasten! Wie sieht eine ideale Vorsteuerung $F_V(s)$ aus? Was müssen Sie beachten?

(b) Nutzen Sie die Information der Störung $z_1(t)$ um Ihren Regler zu entlasten! Wie sieht eine ideale Störgrößenaufschaltung $F_{SA}(s)$ aus? Was müssen Sie beachten?

(c) Zeichnen Sie Vorsteuerung $F_V(s)$ und Störgrößenaufschaltung $F_{SA}(s)$ in Abb. D.1 ein!

Aufgabe D.2.7 (Standardregler: P, PI, PD und PID Regler)**.**
Für alle Reglertypen (P,PI,PID) aus B.3 bearbeiten Sie folgende Aufgabenstellungen. Nutzen Sie auch Matlab/Simulink!

(a) Für $s = j\omega$ (Fourieranalyse) bilden Sie Betrag $|F_{Regler}(j\omega)|_{dB} := 20\log|F_{Regler}(j\omega)|$ und Phase $\angle F_{Regler}(j\omega)$ der Übertragungsfunktion $F_{Regler}(s)$, wobei "Regler" = {P, PI, PD, PID}! (Hinweis: Nutzen Sie hierzu Additivität von Betrag und Phase!)

(b) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm von $F_{Regler}(j\omega)$!

(c) Berechnen Sie die Sprungantwort von $F_{Regler}(s) = \frac{u(s)}{e(s)}$ für einen Fehlersprung $e(t) = e_0\sigma(t)$ mit $e_0 > 0$ (d.h. $e(s) = e_0/s$)!

(d) Berechnen Sie Anfangswert $\lim_{t\to 0} u(t)$, Anfangssteigung $\lim_{t\to 0} \dot{u}(t)$ und Endwert $\lim_{t\to\infty} u(t)$ für einen Einheitssprung $e(t) = \sigma(t)$ mithilfe der Anfangs- und Endwertsätze (siehe B.3)!

Im Folgenden gelte $F_{S1}(s) = 1$, $F_r(s) = 1$ (Einheitsrückführung) und $z_2 = 0$ für den Regelkreis in Abb. D.1, d.h. $y = y_r = y_m$ und $u = v$.

Aufgabe D.2.8 (Beispielregelkreise).
Für folgende Strecken- und Reglerkombinationen wiederholen Sie die unten aufgelisteten Aufgabenstellungen. Es gelte $V_S, T_1 > 0$.

- $F_R(s) = V_R$ *und* $F_{S2}(s) = \dfrac{V_S}{1 + s\,T_1}$
- $F_R(s) = V_R \left(1 + \dfrac{1}{s\,T_n}\right)$ *und* $F_{S2}(s) = \dfrac{V_S}{1 + s\,T_1}$
- $F_R(s) = V_R$ *und* $F_{S2}(s) = \dfrac{V_S}{s\,T_1}$
- $F_R(s) = V_R \left(1 + \frac{1}{s\,T_n}\right)$ *und* $F_{S2}(s) = \dfrac{V_S}{s\,T_1}$

(a) Stellen Sie Führungs- $F_{y_{\text{ref}}}(s) = \frac{y(s)}{y_{\text{ref}}(s)}$ und Störübertragungsfunktion $F_{z_1}(s) = \frac{y(s)}{z_1(s)}$ auf!

(b) Können Sie den Regelkreis stabilisieren (alle Pole in der linken komplexen Halbebene)? In welchem Bereich können die Reglerparameter V_R (und T_n) gewählt werden?

(c) Kann einem Sollwertsprung $y_{\text{ref}}(t) = y_0\sigma(t)$ asymptotisch gefolgt werden (gutes Führungsverhalten)? (Hinweis: Endwertsatz)

(d) Kann ein Störsprung $z_1(t) = z_0\sigma(t)$ asymptotisch ausgeregelt werden (gutes Störverhalten)? (Hinweis: Endwertsatz)

(e) Implementieren Sie die Regelkreise in Matlab/Simulink!

Aufgabe D.2.9 (Reglerauslegung nach Optimierungstabelle (Betragsoptimum und Symmetrisches Optimum)).
Für folgende Strecken wiederholen Sie die unten aufgelisteten Aufgabenstellungen.

- $F_{S2}(s) = \dfrac{3}{1 + s\,7}$
- $F_{S2}(s) = \dfrac{5}{(1 + s\,0.1)(1 + s)}$
- $F_{S2}(s) = \dfrac{5}{s\,10(1 + s\,0.05)}$
- $F_{S2}(s) = \dfrac{5}{(1 + s)(1 + s\,0.05)(1 + s\,0.8)}$

(a) Welchen Regler wählen Sie für gutes Führungsverhalten (d.h. asymptotisch kann einem Sollwertsprung $y_{\text{ref}}(t) = y_0\sigma(t)$ gefolgt werden)?

(b) Welchen Regler wählen Sie für gutes Störverhalten (d.h. asymptotisch kann ein Störsprung $z_1(t) = z_0\sigma(t)$ ausgeregelt werden)?

(c) Bestimmen Sie jeweils die Reglerparameter des gewählten Reglers entsprechend der Optimierungstabelle?

(d) Verbleibt asymptotisch ein Regelfehler bei Soll- oder Störsprung?

(e) Wie hoch ist das zu erwartende Überschwingen $\frac{y_{\max}}{y_0}$*? Wie können Sie das Überschwingen reduzieren? (Hinweis: Was ist* T_G*)?*

(f) Wie groß ist die zu erwartende Anregelzeit t_{an}*?*

(g) Wie groß ist die zu erwartende Ausregelzeit t_{aus}*?*

(h) Implementieren Sie die Regelkreise mit entsprechender Auslegung in Matlab/Simulink und überprüfen Sie die Angaben der Tabelle!

Aufgabe D.2.10 (Polplatzierung)**.**
Es gelte

$$F_{S2}(s) = \frac{V_S\,\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

mit $V_S > 0$, $0 < D < 1$ *und* $\omega_0 > 0$*. Als Regler wollen Sie einen PID-Regler* $F_R(s) = V_R\left(1 + s\,T_v + \frac{1}{s\,T_n}\right)$ *auslegen.*

(a) Ist $F_{S2}(s)$ *stabil? (Hinweis: Verwenden Sie das Routh-Hurwitz Kriterium; keine Berechnung der Pole!)*

(b) Können Sie die Optimierungstabelle nutzen, um $F_R(s)$ *nach BO oder SO auszulegen?*

(c) Stellen Sie Führungs- $F_{y_{\text{ref}}}(s) = \frac{y(s)}{y_{\text{ref}}(s)}$ *und Störübertragungsfunktion* $F_{z_1}(s) = \frac{y(s)}{z_1(s)}$ *auf!*

(d) Welche Ordnung hat der Nenner $N(s)$ *von* $F_{y_{\text{ref}}}(s)$*?*

(e) Es sei folgendes Hurwitzpolynom gegeben: $\chi_{Wunsch}(s) = \prod_{i=1}^{m}(s + 1/T_i)$ *mit* $T_i > 0$*. Wieviele Zeitkonstanten* T_i *(d.h.* $m =?$*) müssen Sie wählen?*

(f) Bestimmen Sie die Reglerparameter V_R*,* T_v *und* T_n*, so dass der Nenner* $N(s)$ *des Regelkreises mit dem Wunschpolynom* $\chi_{Wunsch}(s)$ *übereinstimmt! (Hinweis: Koeffizientenvergleich)*

(g) Ist der Regelkreis stabil, d.h. ist $N(s)$ *ein Hurwitz-Polynom?*

(h) Implementieren Sie den Regelkreis in Matlab/Simulink für $\omega_0 = 10\,[\text{rad/s}]$*,* $D = 0.1$*,* $V_S = 5$ *und* $T_1 = T_2 = T_3 = 1\,[\text{s}]$*!*

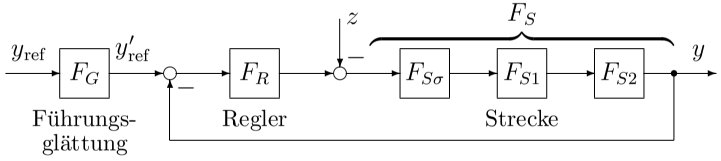
(i) Testen Sie Führungsverhalten und Störverhalten für Einheitssprünge $y_{\text{ref}}(t) = z_1(t) = \sigma(t)$*!*

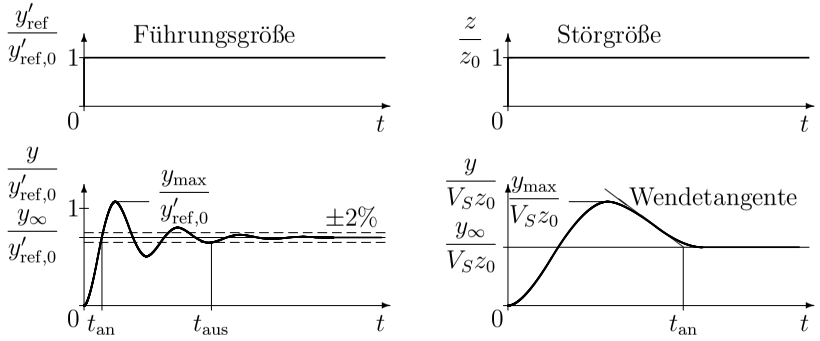
(j) Was passiert für kleinere Wunschzeitkonstanten T_i *(z.B.* $T_1 = T_2 = T_3 = 0.1$*)? Betrachten Sie auch die nötige Stellgröße* $u(t)$*! Sehen Sie Schwierigkeiten in realen Anwendungen?*

D.3 Optimierungstabelle

Siehe folgende Seite.

Optimierungstabelle





Nr.	Strecke: Typ	Strecke: F_S	Strecke: Günstiger Bereich	Regler: Typ	Regler: F_R	Regler: Opt. Krit.	Regler: Einstellung T_n	Regler: Einstellung V_R	Regler: Einstellung T_v	Regler: Einstellung T_G
1	PT_1	$\frac{V_S}{1+sT_\sigma}$	beliebig	I	$V_R\frac{1}{s}$	BO	—	$\frac{1}{2T_\sigma V_S}$	—	—
2	PT_2	$\frac{V_S}{(1+sT_1)(1+sT_\sigma)}$	$\frac{T_1}{T_\sigma}\gg 1$	P	V_R	BO	—	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	—	—
3			$\frac{T_1}{T_\sigma}>1$	PI	$V_R\frac{1+sT_n}{sT_n}$	BO	T_1	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	—	—
4			$\frac{T_1}{T_\sigma}\geq 4$	PI	$V_R\frac{1+sT_n}{sT_n}$	SO	$4T_\sigma$	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	—	— / $0..4T_\sigma$
5	PT_3	$\frac{V_S}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_\sigma)}$ $T_2>T_\sigma$	$\frac{T_1}{T_\sigma}\gg 1$	PD	$V_R(1+sT_v)$	BO	—	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	T_2	—
6			$\frac{T_1}{T_\sigma}>1$	PID	$V_R\frac{(1+sT_n)(1+sT_v)}{sT_n}$	BO	T_1	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	T_2	—
7			$\frac{T_1}{T_\sigma}\geq 4$	PID	$V_R\frac{(1+sT_n)(1+sT_v)}{sT_n}$	SO	$4T_\sigma$	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	T_2	— / $0..4T_\sigma$
8	IT_1	$\frac{V_S}{sT_1(1+sT_\sigma)}$	$\frac{T_1}{V_S T_\sigma}\gg 1$	P	V_R	BO	—	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	—	—
9			beliebig	PI	$V_R\frac{1+sT_n}{sT_n}$	SO	$4T_\sigma$	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	—	— / $4T_\sigma$
10	IT_2	$\frac{V_S}{sT_1(1+sT_2)(1+sT_\sigma)}$ $T_2>T_\sigma$	$\frac{T_1}{V_S T_\sigma}\gg 1$	PD	$V_R(1+sT_v)$	BO	—	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	T_2	—
11			beliebig	PID	$V_R\frac{(1+sT_n)(1+sT_v)}{sT_n}$	SO	$4T_\sigma$	$\frac{T_1}{2T_\sigma V_S}$	T_2	— / $4T_\sigma$

Nr.	Führungsgröße y_{ref} (bzw. y'_{ref}): $\frac{t_{\text{an}}}{T_\sigma}$	$\frac{t_{\text{aus}}}{T_\sigma}(\pm 2\%)$	$\frac{y_{\max}}{y'_{\text{ref},0}}$	$\frac{y_\infty}{y'_{\text{ref},0}}$	$\frac{T_{ers}}{T_\sigma}$	Störgröße z: $\frac{t_{\text{an}}}{T_\sigma}$	$\frac{1}{V_S}\frac{y_{\max}}{z_0}$	$\frac{1}{V_S}\frac{y_\infty}{z_0}$	Nr.
1	4,7	8,4	1,04	1	2	6,3	0,64	0	1
2	(4,7)	(8,4)	$\left(1{,}04\frac{y_\infty}{y'_{\text{ref},0}}\right)$	$\frac{V_R V_S}{1+V_R V_S}$	2	(4,7)	$\approx\frac{1}{1+V_R V_S}$	$\frac{1}{1+V_R V_S}$	2
3	4,7	8,4	1,04	1	2	$5{,}5\sqrt{\frac{T_1}{T_\sigma}}$	$\frac{0{,}5\ldots 1{,}2}{T_1/T_\sigma}$	0	3
4	3,1 … 4,7	8,4 … 16,5	1,04 … 1,43	1	—	≈ 10	$\frac{1{,}2\ldots 1{,}6}{T_1/T_\sigma}$	0	4
	4,7 … 7,6	8,4 … 13,3	1,04 … 1,08	1	2 … 4				
5	(4,7)	(8,4)	$\left(1{,}04\frac{y_\infty}{y'_{\text{ref},0}}\right)$	$\frac{V_R V_S}{1+V_R V_S}$	2	$4+\frac{T_2}{T_\sigma}$	$\approx\frac{1}{1+V_R V_S}$	$\frac{1}{1+V_R V_S}$	5
6	4,7	8,4	1,04	1	2	$4{,}4\sqrt{\frac{T_1 T_2}{T_\sigma^2}}$	$\frac{0{,}5\ldots 0{,}75}{\sqrt{T_1/T_\sigma}\sqrt{T_2/T_\sigma}}$	0	6
7	3,1 … 4,7	8,4 … 16,5	1,04 … 1,43	1	—	$\approx 10\sqrt[4]{\frac{T_2}{T_\sigma}}$	$\frac{1{,}4\ldots 1{,}8}{T_1/T_\sigma\sqrt{T_2/T_\sigma}}$	0	7
	4,7 … 7,6	8,4 … 13,3	1,04 … 1,08	1	2 … 4				
8	4,7	8,4	1,04	1	2	(4,7)	$\approx\frac{1}{V_R V_S}$	$\frac{1}{V_R V_S}$	8
9	3,1	16,5	1,43	1	—	10	$\frac{1{,}6}{T_1/T_\sigma}$	0	9
	7,6	13,3	1,08	1	4				
10	4,7	8,4	1,04	1	2	$4+\frac{T_2}{T_\sigma}$	$\approx\frac{1}{V_R V_S}$	$\frac{1}{V_R V_S}$	10
11	3,1	16,5	1,43	1	—	$\approx 10\sqrt[4]{\frac{T_2}{T_\sigma}}$	$\frac{1{,}8}{T_1/T_\sigma\sqrt{T_2/T_\sigma}}$	0	11
	7,6	13,3	1,08	1	4				

Abbildung D.2: *Optimierungstabelle für* ***exakt bekannte Strecken mit Ordnung*** $n \leq 3$ *und* ***rein reellen Polen*** *(T_1, T_2 … große Zeitkonstanten, T_σ … kleine (Ersatz-)Zeitkonstante).*